Liealgebren, SoSe 19

# Blatt 7

**Aufgabe 25 (6 Punkte)** Sei $K$ ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\operatorname{char} K = 0$. Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra. Sei $M = (M, \varphi)$ ein endlichdimensionaler $\mathfrak{g}$-Modul.
Zu zeigen ist folgendes.

(1) Sei $\mathfrak{a} \trianglelefteqslant \mathfrak{g}$. Es ist $[\mathfrak{a}, M]$ ein $\mathfrak{g}$-Teilmodul von $M$.

(2) Sei $\mathfrak{g}$ auflösbar. Sei $M \neq 0$. Es ist $[\mathfrak{g}^{(1)}, M] \subset M$.

(3) Sei $\mathfrak{g}$ auflösbar. Sei $M$ einfach. Es ist $\dim M = 1$.

**Aufgabe 26 (4 Punkte)** Sei $K$ ein algebraisch abgeschlossener Körper.
Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra.
Sei $\kappa : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow K$ bilinear mit $\kappa(g, [h, k]) = \kappa([g, h], k)$ für $g,\ h,\ k\ \in\ \mathfrak{g}$.
Zu zeigen ist folgendes.

(1) Es ist $f_\kappa : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^*,\ g \longmapsto (x \mapsto \kappa(g, x))$ eine $\mathfrak{g}$-lineare Abbildung.

(2) Sei $\mathfrak{g} \leqslant \mathfrak{gl}(V)$ für einen endlichdimensionalen Vektorraum $V$. Sei $\mathfrak{g}$ einfach. Sei $\operatorname{tr}(g^2) \neq 0$ für ein $g\ \in\ \mathfrak{g}$.

Dann gibt es ein $\lambda \in K$ mit $\kappa(g, h) = \lambda \operatorname{tr}(g \circ h)$ für $g,\ h\ \in\ \mathfrak{g}$.

**Aufgabe 27 (6 Punkte)** Man zeige, daß die Definition des Casimirelementes in Lemma 63 nicht von der Wahl einer Basis der Liealgebra abhängt.

**Aufgabe 28 (6 Punkte)** Man berechne das Casimir-Element $\mathrm{c}_\varphi$ des $\mathfrak{sl}_3(\mathbf{C})$-Moduls $\mathbf{C}^{3\times 1}$, ausgestattet mit dem Morphismus $\varphi : \mathfrak{sl}_3(\mathbf{C}) \hookrightarrow \mathfrak{gl}_3(\mathbf{C}) = \mathfrak{gl}(\mathbf{C}^{3\times 1})$, einmal direkt und einmal mittels Bemerkung 67.(3).

`pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/lexmath/kuenzer/lalg19/`