M. Künzer Abgabe bis Fr 24.05.19

Liealgebren, SoSe 19

Blatt 5

Aufgabe 17 (6 Punkte) Man zeige oder widerlege.
Sei K ein Körper. Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra.

(1) Sei $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$. Es ist $\kappa_\mathfrak{a} = \kappa_\mathfrak{g}|_{\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}}$.

(2) Sei $\mathfrak{h} \leqslant \mathfrak{g}$. Es ist $\kappa_\mathfrak{h} = \kappa_\mathfrak{g}|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$.

Aufgabe 17.5 (6 Punkte)
Sei K ein Körper. Sei $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}_2^{\geqslant}(K)$.

(1) Man bestimme eine Grammatrix von $\kappa_\mathfrak{g}$ bezüglich einer Basis von $\mathfrak{g}$.

(2) Man bestimme $\kappa_\mathfrak{g}(\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g})$.

(3) Man bestimme $\operatorname{rad}\kappa_\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{rad}(\mathfrak{g})$.

Aufgabe 18 (8 Punkte) Man zeige oder widerlege.
Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\operatorname{char} K = 0$. Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra. Es werde $(-)^\perp$ bezüglich $\kappa_\mathfrak{g}$ gebildet.

(1) Ist $\kappa_\mathfrak{g}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 0$, so ist $\mathfrak{g}$ nilpotent. (Hinweis: $[g, h] = h$, $[g, k] = \mathrm{i}k$, $[h, k] = 0$.)

(2) Es ist $\operatorname{rad}\kappa_\mathfrak{g} = \mathfrak{rad}(\mathfrak{g})$.

(3) Sei $\mathfrak{h} \leqslant \mathfrak{g}$. Es ist $\mathfrak{h}$ auflösbar genau dann, wenn $\kappa_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^{(1)}) = 0$ ist.

(4) Sei $\mathfrak{h} \leqslant \mathfrak{g}$. Es ist $\mathfrak{h}^\perp \leqslant \mathfrak{g}$.

Aufgabe 19 (3 Punkte) Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\operatorname{char} K = 0$.
Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Sei $x \in \mathfrak{gl}(V)$.
Ist $\operatorname{tr}(x \circ w) = 0$ für alle $w \in \mathfrak{gl}(V)$, so zeige man, daß x nilpotent ist; einmal mit Lemma 48, einmal ohne.

`pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/lexmath/kuenzer/lalg19/`