M. Künzer Abgabe bis Fr 17.05.19

Liealgebren, SoSe 19

Blatt 4

Aufgabe 14 (3 Punkte)

Sei K ein Körper. Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale nilpotente Liealgebra. Sei $0 \neq \mathfrak{a} \trianglelefteqslant \mathfrak{g}$.
Man zeige $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq 0$. (Hinweis: Lemma 37 auf Bild von $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{a})$.)

Aufgabe 15 (3 Punkte) Sei K ein Körper.
Seien $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ halbeinfache endlichdimensionale Liealgebren.
Man zeige, daß $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$, mit der Lieklammer wie in Bemerkung 15, halbeinfach ist.

Aufgabe 16 (12 Punkte) Zu zeige oder zu widerlegen.
Sei K ein Körper. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Sei $\mathfrak{g} \leqslant \mathfrak{gl}(V)$.

(1) Ist $\mathfrak{g}$ nilpotent, so besteht $\mathfrak{g}$ aus nilpotenten Endomorphismen.

(2) Besteht $\mathfrak{g}$ aus nilpotenten Endomorphismen, so ist $\mathfrak{g}$ nilpotent.

(3) Sei $\mathfrak{h} \leqslant \mathfrak{g}$. Ist $\mathfrak{g}$ halbeinfach, so ist $\mathfrak{h}$ halbeinfach.

(4) Sei $\mathfrak{g}$ halbeinfach. Sei $g \in \mathfrak{g}$. Dann ist g halbeinfach.

(5) Sei jedes Element von $\mathfrak{g}$ halbeinfach. Dann ist $\mathfrak{g}$ halbeinfach.

(6) Ist $g \in \mathfrak{g}$, so ist auch $g_{\mathrm{gs}} \in \mathfrak{g}$.

Aufgabe 21 (3 Punkte) Sei K ein Körper. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum.
Sei $W \subseteq V$ ein Teilraum.
Sei $b : V \times V \longrightarrow K$ eine symmetrische Bilinearform. Sei $b|_{W \times W}$ nichtausgeartet.
Man zeige $V = W \oplus W^{\perp}$.

`pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/lexmath/kuenzer/lalg19/`