M. Künzer Abgabe bis Fr 10.05.19

Liealgebren, SoSe 19

Blatt 3

Aufgabe 9 (2+2+4 Punkte) Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper.
Sei $V \xrightarrow{f} W$ eine lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen.
Seien $x \in \operatorname{End} V$ und $y \in \operatorname{End} W$ mit $f \circ x = y \circ f$. Zu zeigen ist folgendes.

(1) Sei f surjektiv. Ist x halbeinfach, so auch y.

(2) Sei f injektiv. Ist y halbeinfach, so auch x.

(3) Es ist $f \circ x_{\mathrm{gs}} = y_{\mathrm{gs}} \circ f$ und $f \circ x_{\mathrm{gn}} = y_{\mathrm{gn}} \circ f$.

Aufgabe 10 (3+3+1 Punkte) Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper.
Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Schreibe $n := \dim V$.
Sei $m \geqslant 0$. Seien $x_1, \ldots, x_m \in \operatorname{End} V$ halbeinfach mit $x_i \circ x_j = x_j \circ x_i$ für $i, j \in [1, m]$.
Zu zeigen ist folgendes.

(1) Es gibt eine Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V so, daß v_k Eigenvektor von x_i ist für alle $k \in [1, n]$ und alle $i \in [1, m]$.

(2) Jedes Element von $\langle x_1, \ldots, x_m \rangle$ ist halbeinfach.

(3) Es gibt K, V wie oben und halbeinfache Elemente $y, z \in \operatorname{End} V$ so, daß $y + z$ nicht halbeinfach ist.

Aufgabe 11 (3 Punkte) Sei K ein Körper. Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra.
Seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \trianglelefteq \mathfrak{g}$. Man zeige $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \trianglelefteq \mathfrak{g}$. Ist stets $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$?

Aufgabe 13 (3+3+2+2+3 Punkte) Sei K ein Körper.
Man untersuche die Liealgebra $\mathfrak{g}$ auf Auflösbarkeit und Nilpotenz.

(1) Sei $n \geqslant 2$. Sei $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}_n^{>}(K) \leqslant \mathfrak{gl}_n(K)$ die Teilalgebra der strikten oberen Dreiecksmatrizen.

(2) Sei $n \geqslant 2$. Sei $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}_n^{\geqslant}(K) \leqslant \mathfrak{gl}_n(K)$ die Teilalgebra der oberen Dreiecksmatrizen.

(3) Sei $\operatorname{char} K = 2$. Sei $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}_2(K)$.

(4) Sei $\operatorname{char} K = 3$. Sei $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}_3(K)$. Ist $\mathfrak{g}$ halbeinfach? (Hinweis: Lösung zu Aufgabe 3.)

(5) Sei $\operatorname{char} K = 0$. Sei $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}_2(K)$. Bestimme auch alle Ideale von $\mathfrak{g}$, sowie $\mathfrak{rad}(\mathfrak{g})$.