M. Künzer Abgabe bis Fr 03.05.19

Liealgebren, SoSe 19

Blatt 2

Aufgabe 3 (8 Punkte) Sei K ein Körper. Sei $n \geqslant 0$.
Wann ist $\mathfrak{sl}_n(K)$ einfach?

Aufgabe 4 (3+12+2+2 Punkte) Sei K ein Körper. Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra.

(1) Man zeige.
Ist $\mathfrak{a} \trianglelefteqslant \mathfrak{g}$, so ist der Faktorraum $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ vermöge $[g + \mathfrak{a}, h + \mathfrak{a}] := [g, h] + \mathfrak{a}$ eine Liealgebra.
Die Restklassenabbildung $\mathfrak{g} \xrightarrow{\rho = \rho_{\mathfrak{g},\mathfrak{a}}} \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, $g \longmapsto g + \mathfrak{a}$ ist ein Morphismus.

(2) Man zeige oder widerlege.
Sei $\mathfrak{g} \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{h}$ ein Morphismus von Liealgebren. Sei $\tilde{\mathfrak{g}} \leqslant \mathfrak{g}$. Sei $\tilde{\mathfrak{a}} \trianglelefteqslant \mathfrak{a} \trianglelefteqslant \mathfrak{g}$. Sei $\tilde{\mathfrak{h}} \leqslant \mathfrak{h}$.

(i) Es ist $\varphi^{-1}(\tilde{\mathfrak{h}}) \leqslant \mathfrak{g}$. Ist $\tilde{\mathfrak{h}} \trianglelefteqslant \mathfrak{h}$, dann ist $\varphi^{-1}(\tilde{\mathfrak{h}}) \trianglelefteqslant \mathfrak{g}$.
(ii) Es ist $\varphi(\tilde{\mathfrak{g}}) \leqslant \mathfrak{h}$ und $\varphi(\mathfrak{a}) \trianglelefteqslant \mathfrak{h}$.
(iii) Es ist $\tilde{\mathfrak{a}} \trianglelefteqslant \mathfrak{g}$.
(iv) Es ist $\mathfrak{a} \subseteq \operatorname{Kern}\varphi$ genau dann, wenn es einen Morphismus $\bar{\varphi}$ mit $\bar{\varphi} \circ \rho_{\mathfrak{g},\mathfrak{a}} = \varphi$ gibt.
(v) Es ist $(\tilde{\mathfrak{g}} + \mathfrak{a})/\mathfrak{a} \simeq \tilde{\mathfrak{g}}/(\tilde{\mathfrak{g}} \cap \mathfrak{a})$.
(vi) Es ist $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) \trianglelefteqslant \mathfrak{g}$.

(3) Sei $\mathfrak{g} \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{h}$ ein Morphismus von Liealgebren.
Man zeige den Isomorphismus $\mathfrak{g}/\operatorname{Kern}\varphi \xrightarrow[\sim]{\bar{\varphi}} \varphi(\mathfrak{g})$, $g + \operatorname{Kern}\varphi \longmapsto \varphi(g)$.

(4) Sei $\mathfrak{a} \trianglelefteqslant \mathfrak{g}$. Sei $T_{\mathfrak{g},\mathfrak{a}} := \{\, \mathfrak{h} \,:\, \mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{h} \leqslant \mathfrak{g} \,\}$. Sei $T_{\mathfrak{g}/\mathfrak{a}} := \{\, \mathfrak{k} \,:\, \mathfrak{k} \leqslant \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \,\}$. Man zeige die Bijektion

$$\begin{array}{rcl} T_{\mathfrak{g},\mathfrak{a}} & \longrightarrow & T_{\mathfrak{g}/\mathfrak{a}} \\ \mathfrak{h} & \longmapsto & \rho(\mathfrak{h}) \\ \rho^{-1}(\mathfrak{k}) & \longleftarrow\!\shortmid & \mathfrak{k} \end{array}$$

Man zeige, daß diese Bijektion auf die Teilmenge der jeweiligen Ideale einschränkt.

Aufgabe 5 (2+2 Punkte) Sei K ein Körper. Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra.
Sei $V \subseteq \mathfrak{g}$ ein Teilraum. Sei $\mathfrak{h} \leqslant \mathfrak{g}$. Zu zeigen ist folgendes.

(1) Es ist $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(V) \leqslant \mathfrak{g}$. Es ist $\mathfrak{h} \trianglelefteqslant \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \leqslant \mathfrak{g}$.

(2) Es ist $\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(V) \leqslant \mathfrak{g}$.

Aufgabe 8 (3 Punkte) Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper.
Seien $f_1(T), \ldots, f_n(T) \in K[T]$ paarweise ohne gemeinsame Nullstelle, wobei $n \geqslant 0$.
Seien $r_1(T), \ldots, r_n(T) \in K[T]$.
Man zeige, daß ein $r(T) \in K[T]$ existiert mit $r(T) \equiv_{f_i(T)} r_i(T)$ für alle $i \in [1, n]$.