M. Künzer Abgabe bis Fr 05.07.19

Liealgebren, SoSe 19

Blatt 10

Aufgabe 37 (2+2 Punkte) Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\operatorname{char} K = 0$. Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache endlichdimensionale Liealgebra. Sei $\mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{g}$ ein maximaler Torus.
Man zeige.

(1) Eine Teilalgebra von $\mathfrak{g}$, die $\mathfrak{g}_\sigma$ enthält für alle $\sigma \in \Phi(\mathfrak{g})$, ist bereits gleich $\mathfrak{g}$.

(2) Seien $\sigma,\ \rho \in \Phi(\mathfrak{g})$. Ist auch $\sigma + \rho \in \Phi(\mathfrak{g})$, so ist $[\mathfrak{g}_\sigma\,, \mathfrak{g}_\rho] = \mathfrak{g}_{\sigma+\rho}\,.$

Aufgabe 38 ((2+3+5)×2 Punkte)
Sei $K = \mathbf{C}$. Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache endlichdimensionale Liealgebra.

(i) Man bestimme einen maximalen Torus $\mathfrak{t}$ in $\mathfrak{g}$.

(ii) Man bestimme die Menge der Wurzeln $\Phi(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{t}^*$.

(iii) Sei $E = \mathfrak{t}_{\mathbf{R}} = {}_{\mathbf{R}}\langle\, t_\chi \,:\, \chi \in \Phi(\mathfrak{g})\,\rangle$, ausgestattet mit der Bilinearform $\kappa_{\mathfrak{g}}|^{\mathbf{R}}_{E\times E}$.
Man bestimme eine Orthonormalbasis von E und schreibe t_χ in dieser Basis für alle $\chi \in \Phi(\mathfrak{g})$. Skizze!
Man bestätige Lemma 102.(1) in 2 Fällen. Man bestätige Lemma 101.(1, 2) in 2 Fällen.

(1) Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3(\mathbf{C})$.

(2) Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(\mathbf{C}, b)$; b wie in Aufgabe 30.

Aufgabe 43 (4 Punkte) Sei $m \geqslant 0$. Sei K ein Körper mit $|K| \geqslant m$.
Sei V ein Vektorraum. Sei $U_i \subset V$ ein Teilraum für $i \in [1, m]$.
Man zeige $\bigcup_{i\in[1,m]} U_i \subset V$.

`pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/lexmath/kuenzer/lalg19/`