Besprechung am 16.01.20

Aufgabe 35: *Basiswechselmatrix*

35.1 Sei E die Standardbasis. Geben Sie die Matrix ${}_E\,\mathrm{id}_E$ der identischen Abbildung $\mathrm{id}\colon \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}^{2\times 1}\colon v \mapsto v$ an.

35.2 Gegeben seien die Basen

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \qquad C = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Bestimmen Sie die Matrizen ${}_E\,\mathrm{id}_B$, ${}_B\,\mathrm{id}_E$, ${}_E\,\mathrm{id}_C$, ${}_C\,\mathrm{id}_E$ und ${}_C\,\mathrm{id}_B$.

35.3 Es sind die Koordinatendarstellungen der Vektoren

$${}_C u = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad {}_B v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad {}_E w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

in den entsprechenden Basen gegeben. Berechnen Sie ${}_E u$, ${}_C v$ und ${}_B w$.

Aufgabe 36: *Lineare Abbildungen und Basiswechsel*

Gegeben sei die lineare Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}^{2\times 1}\colon (x,y)^{\mathrm{t}} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

36.1 Versuchen Sie eine geometrische Interpretation dieser Abbildung zu geben, indem Sie verschiedene Vektoren Ihrer Wahl abbilden.

36.2 Gesucht ist nun ${}_E S_E$ (mit der Standardbasis $E = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ des $\mathbb{R}^{2\times 1}$) der linearen Abbildung $S\colon \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}^{2\times 1}$, die eine Spiegelung an der Geraden $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$ beschreibt. Führen Sie dazu einen geeigneten Basiswechsel durch.

Aufgabe 37: *Determinanten*

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

und $D = \begin{pmatrix} -12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 1}$.

37.1 Bestimmen Sie die Determinanten von A, B, C, D und $F = 4\cdot B$ mit $\gamma \in \mathbb{R}$ (Verwenden Sie dazu verschiedene Methoden. Sind die Matrizen invertierbar?).

37.2 Berechnen Sie die Determinante von $B \in \mathbb{F}_3^{3\times 3}$.

37.3 Bestimmen Sie die Determinante von $G = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_4^{2\times 2}$.