D. Merkt

Vortragsübung 10

WS 19/20

Besprechung am 19.12.19

Aufgabe 30: *Unterräume*

Untersuchen Sie, ob es sich bei den Teilmengen U des entsprechenden Vektorraums V um einen Unterraum handelt.

30.1 V ist $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $U \subset V$ mit $U =$ „Menge aller konstanten Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$"

30.2 V ist der Vektorraum $\mathbb{C}^{2\times 1}$ über $\mathbb{C}$

a) $U_1 = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{C} \right\}$

b) $U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 1} \,\middle|\, 2z - w = 0 \right\}$

c) $U_3 = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 1} \,\middle|\, 2z - \overline{w} = 0 \right\}$

Aufgabe 31: *Unterräume*

Gegeben seien zwei Unterräume des $\mathbb{R}^{3\times 1}$

$$U_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Zeigen oder widerlegen Sie:

31.1 Der Durchschnitt der Unterräume, also $U_1 \cap U_2$, ist ein Unterraum.

31.2 Die Vereinigung der Unterräume, also $U_1 \cup U_2$, ist ein Unterraum.

31.3 Es gilt $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^{3\times 1}$.

Aufgabe 32: *Kreuzprodukt*

Gegeben seien die Vektoren $u, v, w, z \in \mathbb{R}^{3\times 1}$

$$u = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad w = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad z = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

32.1 Berechnen Sie: $u \times v$, $v \times u$, $v \times w$ und $z^{\mathrm{t}} \cdot (u \times w)$.

32.2 Konstruieren Sie einen Vektor, der senkrecht auf der Ebene $x = w + s \cdot u + t \cdot v \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ mit $s, t \in \mathbb{R}$ steht. Welchen Abstand hat die Ebene vom Ursprung?

32.3 Bestimmen Sie das Volumen des Parallelepipeds, das von u, v, w aufgespannt wird.

32.4 Gilt $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ für $a, b, c \in \mathbb{R}^{3\times 1}$?