Mathematik 1 für inf, swt, msv

Blatt 9

Platzaufgaben

Platzaufgabe 28 Seien $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $w := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^{3\times 1}$ gegeben.

(a) Berechnen Sie $v^{\mathrm{t}} \cdot w$.

(b) Berechnen Sie $\|v\|$ und $\|w\|$.

(c) Berechnen Sie den Cosinus des von v und w eingeschlossenen Winkels.

Platzaufgabe 29 Gegeben seien folgende Unterräume von $\mathbb{R}^{4\times 1}$.

$$T := {}_{\mathbb{R}}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad U := {}_{\mathbb{R}}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis von T und eine Basis von U.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von $T + U$.

(c) Bestimmen Sie eine Basis von $T \cap U$.

Platzaufgabe 30
Wir nehmen zur Kenntnis: Es ist $\mathbb{F}_4$ ein $\mathbb{F}_2$-Vektorraum, wobei das Produkt $\lambda \cdot x$ für $\lambda \in \mathbb{F}_2$ und $x \in \mathbb{F}_4$ im Körper $\mathbb{F}_4$ zu bilden ist.

(a) Zeigen Sie, dass $(1, \alpha)$ eine Basis von $\mathbb{F}_4$ als $\mathbb{F}_2$-Vektorraum ist.

(b) Bestimmen Sie alle eindimensionalen $\mathbb{F}_2$-Unterräume von $\mathbb{F}_4$.

Platzaufgabe 31 Sei K ein Körper.

(a) Zeigen Sie, dass $P_2 := \{f(X) \in K[X] : \deg(f(X)) \leqslant 2\}$ ein Unterraum von $K[X]$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $(1, X, X^2)$ eine Basis von P_2 ist. Bestimmen Sie $\dim_K P_2$.

(c) Untersuchen Sie, ob $(X, X + 1, X^2 + X + 1)$ eine Basis von P_2 ist.

Mathematik 1 für inf, swt, msv

Blatt 9

Hausaufgaben

Hausaufgabe 33 Gegeben seien folgende Unterräume von $\mathbb{F}_3^{5\times 1}$.

$$T := {}_{\mathbb{F}_3}\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\\-1\end{pmatrix} \rangle \qquad U := {}_{\mathbb{F}_3}\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\1\end{pmatrix} \rangle$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis von T und eine Basis von U.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von $T + U$.

(c) Bestimmen Sie eine Basis von $T \cap U$.

Hausaufgabe 34 Für einen Parameter $t \in \mathbb{R}$ seien $v_t := \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\t\\1\end{pmatrix}$ und $w_t := \begin{pmatrix}t\\t\\2\end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

(a) Bestimmen Sie die Mengen $A_1 := \{x \in \mathbb{R} : ||v_x|| = 1\}$ und $A_2 := \{x \in \mathbb{R} : ||w_x|| = 1\}$.

(b) Skizzieren Sie die Menge $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : v_x \text{ ist orthogonal zu } w_y\}$ in der Ebene $\mathbb{R}^2$.

(c) Bestimmen Sie den Cosinus des von v_t und w_t eingeschlossenen Winkels.

Hausaufgabe 35 Sei K ein Körper. Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

(a) Zeigen Sie, dass $P_n := \{f(X) \in K[X] : \deg(f(X)) \leqslant n\}$ ein Unterraum von $K[X]$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $(X^0, X^1, \ldots, X^n)$ eine Basis von P_n ist. Bestimmen Sie $\dim_K P_n$.

(c) Bestimmen Sie zwei verschiedene Basen von P_2 , die $X + 1$ und $X^2 + 1$ enthalten.

Hausaufgabe 36 Wir nehmen zur Kenntnis: Es ist $\mathbb{F}_8$ ein $\mathbb{F}_2$-Vektorraum, wobei das Produkt $\lambda \cdot x$ für $\lambda \in \mathbb{F}_2$ und $x \in \mathbb{F}_8$ im Körper $\mathbb{F}_8$ zu bilden ist.

(a) Zeigen Sie, dass $(1, \beta, \beta^2)$ eine Basis von $\mathbb{F}_8$ als $\mathbb{F}_2$-Vektorraum ist.

(b) Bestimmen Sie alle eindimensionalen $\mathbb{F}_2$-Unterräume von $\mathbb{F}_8$.

(c) Bestimmen Sie alle zweidimensionalen $\mathbb{F}_2$-Unterräume von $\mathbb{F}_8$, die $1 + \beta$ enthalten. Wieviele verschiedene solche Unterräume gibt es?