Künzer, Nitsche, Ritter Wintersemester 2019/20

Mathematik 1 für inf, swt, msv

Blatt 12

Platzaufgaben

Platzaufgabe 39 Wir betrachten die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ aus Platzaufgabe 37. Insbesondere kennen wir bereits das charakteristische Polynom $\chi_A(X) = (-1-X)(2-X)^2$ und die Eigenräume $\mathrm{E}_A(-1) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ und $\mathrm{E}_A(2) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ von A.

(a) Begründen Sie, warum A nicht diagonalisierbar ist.

(b) Bestimmen Sie eine Basis des Hauptraums $\mathrm{H}_A(-1)$. Ergänzen Sie die Basis von $\mathrm{E}_A(2)$ zu einer Basis des Hauptraums $\mathrm{H}_A(2)$.

(c) Bilden Sie Hauptvektorketten und setzen Sie diese zu einer Jordanbasis von $\mathbb{Q}^{3\times 1}$ für A zusammen.

(d) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ so, dass $J := S^{-1}AS$ eine Jordansche Normalform von A ist. Geben Sie J an.

Vergleichen Sie zur Probe SJ und AS.

Platzaufgabe 40 Gegeben ist die folgende Matrix.

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 & 9 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und den Eigenwert λ_1 von A.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(1)})$. Ergänzen Sie diese zu einer Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(1)}^2)$. Ergänzen Sie diese zu einer Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(1)}^3)$.

Setzen Sie dies fort, bis Sie eine Basis des Hauptraums von A zum Eigenwert λ_1 erhalten haben.

(c) Bestimmen Sie eine Jordanbasis und eine Jordansche Normalform von A.

Platzaufgabe 41 Gegeben sind die folgenden Matrizen.

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}, \qquad B := \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad C := \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{2\times 2}$$

(a) Bestimmen Sie jeweils das charakteristische Polynom der Matrix.

(b) Wir betrachten nur die Matrizen, deren charakteristisches Polynom zerfällt. Bestimmen Sie jeweils eine Jordansche Normalform der Matrix und entscheiden Sie, ob die Matrix diagonalisierbar ist.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von C, ohne das charakteristische Polynom zu verwenden.

Mathematik 1 für inf, swt, msv

Blatt 12

Hausaufgaben

Hausaufgabe 45 Gegeben ist die Matrix $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{5\times 5}$.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von A.

(b) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert von A eine Basis des Hauptraums.

(c) Bestimmen Sie eine Jordanbasis und eine Jordansche Normalform von A.

Hausaufgabe 46 Gegeben ist die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{6\times 6}$$

mit charakteristischem Polynom $\chi_A(X) = (2-X)(-1-X)^5$.

(a) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert von A eine Basis des Hauptraums.

(b) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{Q}^{6\times 6}$ so, dass $J := S^{-1}AS$ eine Jordansche Normalform von A ist. Geben Sie J an.

Hausaufgabe 47 Gegeben ist die folgende von einem Parameter $t \in \mathbb{R}$ abhängige Matrix.

$$A_t := \begin{pmatrix} 8 & 3t-4 & 10 \\ 0 & t & 0 \\ -5 & -t+3 & -7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A_t in Abhängigkeit von t.

(b) Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für die A_t diagonalisierbar ist.

(c) Bestimmen Sie eine Jordansche Normalform von A_t in Abhängigkeit von t, gegebenenfalls mit Fallunterscheidungen.

Hausaufgabe 48 Gegeben ist die Matrix $A := \begin{pmatrix} -25 & -27 & 13 \\ -21 & -19 & 11 \\ -80 & -80 & 42 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$. Es besitzt A den Eigenwert λ_1 mit $\mathrm{aV}_A(\lambda_1) = 2$ und $\mathrm{E}_A(\lambda_1) = {}_{\mathbb{C}}\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$.

(a) Bestimmen Sie den Eigenwert λ_1 und seine geometrische Vielfachheit.

(b) Bestimmen Sie alle anderen Eigenwerte von A und jeweils ihre algebraische und geometrische Vielfachheit.

(c) Bestimmen Sie $\det(A)$.

(d) Bestimmen Sie eine Jordansche Normalform von A.