Künzer, Nitsche, Ritter Wintersemester 2019/20

Mathematik 1 für inf, swt, msv

Blatt 10

Platzaufgaben

Platzaufgabe 32 Entscheiden Sie, ob f eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung ist.
Finden Sie diesenfalls eine Matrix A mit $f = \mathrm{mult}_A$.
Bestimmen Sie $\mathrm{Rang}(A)$. Bestimmen Sie unter Verwendung dieses Rangs auch $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Kern}(A))$.

(a) $f : \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}^{2\times 1} \; : \; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+y \\ y \end{pmatrix}$

(b) $f : \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}^{2\times 1} \; : \; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x \\ xy \end{pmatrix}$

(c) $f : \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}^{3\times 1} \; : \; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ x+y \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$

Platzaufgabe 33 Gegeben sei der Unterraum $U = {}_{\mathbb{R}}\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle \subseteq \mathbb{R}^{3\times 1}$. Konstruieren Sie, falls möglich, jeweils eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^{3\times 1}$ mit den angegebenen Eigenschaften. Geben Sie jeweils das Bild von $\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) \in U$ unter f an.

(a) f ist injektiv.

(b) f ist surjektiv.

(c) f ist weder injektiv noch surjektiv.

Platzaufgabe 34 Gegeben sei $f := \mathrm{mult}_A : \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}^{3\times 1}$ mit $A := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
Sei B die Standardbasis und $B' = (b'_1, b'_2) := \left(\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) \right)$ eine weitere Basis von $\mathbb{R}^{2\times 1}$.
Sei C die Standardbasis und $C' = (c'_1, c'_2, c'_3) := \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \right)$ eine weitere Basis von $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

(a) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor ${}_{B'}(b'_1 + b'_2)$.

(b) Bestimmen Sie ${}_{C}f_{B}$ und ${}_{C'}f_{B'}$ direkt nach Definition von beschreibenden Matrizen.

(c) Bestimmen Sie ${}_{B}\mathrm{id}_{B'}$, ${}_{C}\mathrm{id}_{C'}$ und ${}_{C'}\mathrm{id}_{C}$.

(d) Bestimmen Sie ${}_{C'}\mathrm{id}_{C} \cdot {}_{C}f_{B} \cdot {}_{B}\mathrm{id}_{B'}$ und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit Teil (b).

Platzaufgabe 35 Sei $\varphi : \mathbb{R}[X]_{\leqslant 2} \to \mathbb{R}[X]_{\leqslant 2} : f(X) \mapsto 2 \cdot f(X) - X \cdot f(-1)$. Es ist φ $\mathbb{R}$-linear. Wir betrachten die Basis $B := (1, X, X^2)$ von $\mathbb{R}[X]_{\leqslant 2}$. Bestimmen Sie ${}_{B}\varphi_{B}$.

Mathematik 1 für inf, swt, msv

Blatt 10

Hausaufgaben

Hausaufgabe 37

(a) Bestimmen Sie alle $\mathbb{F}_3$-linearen Abbildungen $\mathbb{F}_3^{2\times 1} \to \mathbb{F}_3$.

Geben Sie an, welche injektiv und welche surjektiv sind.

(b) Wir betrachten die $\mathbb{F}_2$-lineare Abbildung $f : \mathbb{F}_8 \to \mathbb{F}_8 : x \mapsto x^2 + x$.

Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{F}_2$-Vektorraums $\mathrm{Kern}(f)$. Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{F}_2}(f(\mathbb{F}_8))$.

Hausaufgabe 38 Gegeben ist die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^{4\times 1} \to \mathbb{R}^{2\times 1} \ : \ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 \\ 10x_1 - 3x_2 - x_3 - 4x_4 \end{pmatrix}.$$

Sei B die Standardbasis und $B' := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ eine weitere Basis von $\mathbb{R}^{4\times 1}$.

Sei C die Standardbasis und $C' := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ eine weitere Basis von $\mathbb{R}^{2\times 1}$.

(a) Bestimmen Sie die beschreibende Matrix ${}_C f_B$.

(b) Bestimmen Sie ${}_B \mathrm{id}_{B'}$, ${}_{C'} \mathrm{id}_C$ und ${}_{C'} f_{B'}$.

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(f)$.

Hausaufgabe 39 Wir betrachten die Abbildung $\kappa : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2} \ : \ A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie, dass κ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung ist.

(b) Bestimmen Sie ${}_B \kappa_B$, ${}_B(\kappa \circ \kappa)_B$ und ${}_B\big((\kappa \circ \kappa)(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix})\big)$ bezüglich der Basis $B := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(c) Bestimmen Sie $\Big(\kappa\big(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\big)\Big)^2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Hausaufgabe 40

(a) Für einen Parameter $t \in \mathbb{R}$ seien $v_t := \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $w_t := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für welche der Flächeninhalt des von v_t und w_t aufgespannten Parallelogramms gleich $2\sqrt{3}$ ist.

(b) Bestimmen Sie den Rang der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -4 & -5 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$.

(c) Sei $f(X) := 3 - 2X - 4X^2 + X^3 \in \mathbb{R}[X]_{\leqslant 3}$. Sei $B := (1 + X + X^2, X + X^2, X^2)$ eine Basis von $\mathbb{R}[X]_{\leqslant 2}$. Sei $C := (1 + X, X + X^2, X^2 + X^3, X^3)$ eine Basis von $\mathbb{R}[X]_{\leqslant 3}$.

Sei $\varphi : \mathbb{R}[X]_{\leqslant 3} \to \mathbb{R}[X]_{\leqslant 2}$ die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung mit ${}_B \varphi_C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -4 & -5 & 4 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie ${}_C f(X)$, ${}_B \varphi\big(f(X)\big)$ und das Polynom $\varphi\big(f(X)\big) \in \mathbb{R}[X]_{\leqslant 2}$.