Aufgabe 6 (4 Punkte)

Sei $T := {}_{\mathbb{F}_3}\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{F}_3^{5\times 1}$. Sei $U := {}_{\mathbb{F}_3}\langle \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{F}_3^{5\times 1}$.

Sei $A := \begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\1&1&1&0&1\\0&-1&1&-1&0\\0&0&1&-1&-1\\0&0&0&1&-1\end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{5\times 5}$ mit den angegebenen Basen von T und U als Spaltentupel.

(a) Bestimmen Sie die Zeilenstufenform von A : $\begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&-1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

(b) Bestimmen Sie Basen der folgenden Unterräume von $\mathbb{F}_3^{5\times 1}$.

Basis von $T+U$: $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\-1\\1\end{pmatrix} \right)$

Basis von $T\cap U$: $\left(\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\-1\\0\end{pmatrix} \right)$

Aufgabe 7 (6 Punkte) Gegeben sind die Basen $B = (1,\ X)$ und $C = (2+3X, 1+2X)$ von $\mathbb{R}[X]_{\leqslant 1}$.

Wir betrachten die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}[X]_{\leqslant 1} \to \mathbb{R}[X]_{\leqslant 1} :\ f(X) \mapsto X \cdot f(1) - 2 \cdot f(2X)$.

Bestimmen Sie:

${}_B\varphi_B = \begin{pmatrix}-2&0\\1&-3\end{pmatrix}$ ${}_B\mathrm{id}_C = \begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}$ ${}_C\mathrm{id}_B = \begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}$

${}_C\varphi_B = \begin{pmatrix}-5&3\\8&-6\end{pmatrix}$ ${}_C\varphi(\,X\,) = \begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Name des Tutors / der Tutorin:

Gruppennummer:

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	Summe
Punkte	/2	/3	/4	/3	/8	/4	/6	/ 30

Mathematik 1 für inf, swt, msv

Scheinklausur 2

Wintersemester 2019/20

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (2 Punkte) Seien die Polynome $f_1(X) := X^2 + X + 1$, $f_2(X) := 2X^2 - X - 2$, $f_3(X) := -X^2 + 3X - 2$ und $f_4(X) := -2X^2 - 2X + 1$ in $\mathbb{F}_5[X]$ gegeben.

Bestimmen Sie $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{F}_5$ mit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \neq (0,0,0,0)$ und mit

$$\lambda_1 f_1(X) + \lambda_2 f_2(X) + \lambda_3 f_3(X) + \lambda_4 f_4(X) \;=\; 0\,.$$

$\lambda_1 =$ 2 $\lambda_2 =$ -2 $\lambda_3 =$ 1 $\lambda_4 =$ 1

Aufgabe 2 (3 Punkte) Gegeben ist die Matrix $A := \begin{pmatrix} \alpha & 1+\alpha & \alpha \\ 1 & 1 & 0 \\ \alpha & 1 & 1+\alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_4^{3\times 3}$.

Bestimmen Sie die Inverse: $A^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1+\alpha \end{pmatrix}}$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Gegeben ist die Matrix $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{4\times 4}$.

(a) Bestimmen Sie $\chi_A(X) = \boxed{(X-2)^3(X-1)}$.

(b) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert von A die zugehörige algebraische Vielfachheit.

$$\boxed{\mathrm{aV}_A(2) = 3, \quad \mathrm{aV}_A(1) = 1}$$

(c) Bestimmen Sie eine Basis des Eigenraums $\mathrm{E}_A(2)$.

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Sei $t \in \mathbb{Q}$ ein Parameter. Sei $A_t := \begin{pmatrix} -1 & -5 & 5 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$.

(a) Bestimmen Sie $\chi_{A_t}(X) = \boxed{-(X+1)(X-6)(X-t)}$.

(b) Bestimmen Sie die Menge $\{t \in \mathbb{Q} : A_t \text{ ist nicht diagonalisierbar}\} = \boxed{\{-1\}}$.

Scheinklausur 2 **Mathematik 1 für inf, swt, msv** **08. 02. 2020**

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Gegeben ist $A := \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$.

Ihr charakteristisches Polynom $\chi_A(X) = -(X+2)^4(X+1)$ ist bekannt.

(a) Bestimmen Sie Basen der folgenden Unterräume von $\mathbb{Q}^{5\times 1}$.

Basis von $\mathrm{E}_A(-2)$: $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$

Basis von $\mathrm{H}_A(-2)$: $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)}$

Basis von $\mathrm{H}_A(-1)$: $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$

(b) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$ so, dass $J := S^{-1}AS$ eine Jordansche Normalform von A ist. Geben Sie J an.

$S = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$ $J = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Sei $T := {}_{\mathbb{F}_3}\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{F}_3^{5\times 1}$. Sei $U := {}_{\mathbb{F}_3}\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{F}_3^{5\times 1}$.

Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{5\times 5}$ mit den angegebenen Basen von T und U als Spaltentupel.

(a) Bestimmen Sie die Zeilenstufenform von A : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) Bestimmen Sie Basen der folgenden Unterräume von $\mathbb{F}_3^{5\times 1}$.

Basis von $T+U$: $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Basis von $T\cap U$: $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

Aufgabe 7 (6 Punkte) Gegeben sind die Basen $B = (1, X)$ und $C = (3 + 2X, -2 - X)$ von $\mathbb{R}[X]_{\leqslant 1}$.

Wir betrachten die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}[X]_{\leqslant 1} \to \mathbb{R}[X]_{\leqslant 1} : \; f(X) \mapsto X \cdot f(-1) - 3 \cdot f(2X)$.

Bestimmen Sie:

${}_B\varphi_B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$ ${}_B\mathrm{id}_C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ ${}_C\mathrm{id}_B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

${}_C\varphi_B = \begin{pmatrix} 5 & -14 \\ 9 & -21 \end{pmatrix}$ ${}_C\varphi(\,X\,) = \begin{pmatrix} -14 \\ -21 \end{pmatrix}$

Name, Vorname: **Matrikelnummer:**

Name des Tutors / der Tutorin: **Gruppennummer:**

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	Summe
Punkte	/2	/3	/4	/3	/8	/4	/6	/ 30

Mathematik 1 für inf, swt, msv

Scheinklausur 2

Wintersemester 2019/20

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (2 Punkte) Seien die Polynome $f_1(X) := X^2 + X + 1$, $f_2(X) := 2X^2 - X - 2$, $f_3(X) := -X^2 + 3X - 2$ und $f_4(X) := -2X^2 - 2X + 2$ in $\mathbb{F}_5[X]$ gegeben.

Bestimmen Sie $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{F}_5$ mit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \neq (0, 0, 0, 0)$ und mit

$$\lambda_1 f_1(X) + \lambda_2 f_2(X) + \lambda_3 f_3(X) + \lambda_4 f_4(X) \;=\; 0\,.$$

$\lambda_1 = 2$ $\lambda_2 = -1$ $\lambda_3 = -2$ $\lambda_4 = 1$

Aufgabe 2 (3 Punkte) Gegeben ist die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1+\alpha & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & \alpha \\ 1+\alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_4^{3\times 3}$.

Bestimmen Sie die Inverse: $A^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 1+\alpha & \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & 1+\alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}}$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Gegeben ist die Matrix $A := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{4\times 4}$.

(a) Bestimmen Sie $\chi_A(X) = \boxed{(X+2)^3(X+1)}$.

(b) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert von A die zugehörige algebraische Vielfachheit.

$$\boxed{\mathrm{aV}_A(-2) = 3, \quad \mathrm{aV}_A(-1) = 1}$$

(c) Bestimmen Sie eine Basis des Eigenraums $\mathrm{E}_A(-2)$.

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Sei $t \in \mathbb{Q}$ ein Parameter. Sei $A_t := \begin{pmatrix} -2 & 5 & -5 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$.

(a) Bestimmen Sie $\chi_{A_t}(X) = \boxed{-(X+2)(X-3)(X-t)}$.

(b) Bestimmen Sie die Menge $\{t \in \mathbb{Q} : A_t \text{ ist nicht diagonalisierbar}\} = \boxed{\{3\}}$.

Scheinklausur 2 | Mathematik 1 für inf, swt, msv | 08. 02. 2020

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Gegeben ist $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & -2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$.

Ihr charakteristisches Polynom $\chi_A(X) = -(X-3)^4(X-1)$ ist bekannt.

(a) Bestimmen Sie Basen der folgenden Unterräume von $\mathbb{Q}^{5\times 1}$.

Basis von $\mathrm{E}_A(3)$: $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$

Basis von $\mathrm{H}_A(3)$: $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)}$

Basis von $\mathrm{H}_A(1)$: $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$

(b) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$ so, dass $J := S^{-1}AS$ eine Jordansche Normalform von A ist. Geben Sie J an.

$S = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$ $\quad J = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Sei $T := {}_{\mathbb{F}_3}\left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{F}_3^{5\times 1}$. Sei $U := {}_{\mathbb{F}_3}\left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{F}_3^{5\times 1}$.

Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{5\times 5}$ mit den angegebenen Basen von T und U als Spaltentupel.

(a) Bestimmen Sie die Zeilenstufenform von A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie Basen der folgenden Unterräume von $\mathbb{F}_3^{5\times 1}$.

Basis von $T+U$: $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\\0\end{pmatrix} \right)$

Basis von $T\cap U$: $\left(\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix} \right)$

Aufgabe 7 (6 Punkte) Gegeben sind die Basen $B = (1,\, X)$ und $C = (2+X, 3+2X)$ von $\mathbb{R}[X]_{\leqslant 1}$.

Wir betrachten die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}[X]_{\leqslant 1} \to \mathbb{R}[X]_{\leqslant 1} :\ f(X) \mapsto X \cdot f(-1) + 2 \cdot f(2X)$.

Bestimmen Sie:

${}_B\varphi_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ${}_B\mathrm{id}_C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ${}_C\mathrm{id}_B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

${}_C\varphi_B = \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ ${}_C\varphi(X) = \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \end{pmatrix}$

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Name des Tutors / der Tutorin:

Gruppennummer:

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	Summe
Punkte	/2	/3	/4	/3	/8	/4	/6	/ 30

Mathematik 1 für inf, swt, msv

Scheinklausur 2

Wintersemester 2019/20

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (2 Punkte) Seien die Polynome $f_1(X) := X^2 + X + 1$, $f_2(X) := 2X^2 - X - 2$, $f_3(X) := -X^2 + 3X - 2$ und $f_4(X) := -2X^2 - 2X - 1$ in $\mathbb{F}_5[X]$ gegeben.

Bestimmen Sie $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{F}_5$ mit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \neq (0,0,0,0)$ und mit

$$\lambda_1 f_1(X) + \lambda_2 f_2(X) + \lambda_3 f_3(X) + \lambda_4 f_4(X) \;=\; 0\,.$$

$\lambda_1 = 2$ $\lambda_2 = 1$ $\lambda_3 = 2$ $\lambda_4 = 1$

Aufgabe 2 (3 Punkte) Gegeben ist die Matrix $A := \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 1+\alpha \\ 1 & 1+\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_4^{3\times 3}$.

Bestimmen Sie die Inverse: $A^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 1+\alpha & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \\ 1+\alpha & \alpha & \alpha \end{pmatrix}}$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Gegeben ist die Matrix $A := \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{4\times 4}$.

(a) Bestimmen Sie $\chi_A(X) = \boxed{(X+2)^3(X-1)}$.

(b) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert von A die zugehörige algebraische Vielfachheit.

$\boxed{\mathrm{aV}_A(-2) = 3, \quad \mathrm{aV}_A(1) = 1}$

(c) Bestimmen Sie eine Basis des Eigenraums $\mathrm{E}_A(-2)$.

$\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Sei $t \in \mathbb{Q}$ ein Parameter. Sei $A_t := \begin{pmatrix} -3 & 6 & -6 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$.

(a) Bestimmen Sie $\chi_{A_t}(X) = \boxed{-(X+3)(X-4)(X-t)}$.

(b) Bestimmen Sie die Menge $\{t \in \mathbb{Q} : A_t \text{ ist nicht diagonalisierbar}\} = \boxed{\{-3\}}$.

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Gegeben ist $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$.

Ihr charakteristisches Polynom $\chi_A(X) = -(X-2)^4(X-3)$ ist bekannt.

(a) Bestimmen Sie Basen der folgenden Unterräume von $\mathbb{Q}^{5\times 1}$.

Basis von $\mathrm{E}_A(2)$: $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$

Basis von $\mathrm{H}_A(2)$: $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}$

Basis von $\mathrm{H}_A(3)$: $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$

(b) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$ so, dass $J := S^{-1}AS$ eine Jordansche Normalform von A ist. Geben Sie J an.

$S = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$ $J = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Sei $T := {}_{\mathbb{F}_3}\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\\1\end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{F}_3^{5\times 1}$. Sei $U := {}_{\mathbb{F}_3}\langle \begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\\0\end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{F}_3^{5\times 1}$.

Sei $A := \begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&1&-1&1\\1&-1&-1&-1&-1\\0&1&0&1&0\end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{5\times 5}$ mit den angegebenen Basen von T und U als Spaltentupel.

(a) Bestimmen Sie die Zeilenstufenform von A :

$$\begin{pmatrix}1&0&0&-1&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie Basen der folgenden Unterräume von $\mathbb{F}_3^{5\times 1}$.

Basis von $T+U$: $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\\0\end{pmatrix} \right)$

Basis von $T\cap U$: $\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right)$

Aufgabe 7 (6 Punkte) Gegeben sind die Basen $B = (1,\, X)$ und $C = (3-2X, 2-X)$ von $\mathbb{R}[X]_{\leqslant 1}$.
Wir betrachten die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}[X]_{\leqslant 1} \to \mathbb{R}[X]_{\leqslant 1} :\ f(X) \mapsto X \cdot f(1) + 3 \cdot f(2X)$.

Bestimmen Sie :

${}_B\varphi_B = \begin{pmatrix}3&0\\1&7\end{pmatrix}$ ${}_B\mathrm{id}_C = \begin{pmatrix}3&2\\-2&-1\end{pmatrix}$ ${}_C\mathrm{id}_B = \begin{pmatrix}-1&-2\\2&3\end{pmatrix}$

${}_C\varphi_B = \begin{pmatrix}-5&-14\\9&21\end{pmatrix}$ ${}_C\varphi(\,X\,) = \begin{pmatrix}-14\\21\end{pmatrix}$

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Name des Tutors / der Tutorin:

Gruppennummer:

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	Summe
Punkte	/2	/3	/4	/3	/8	/4	/6	/ 30

Mathematik 1 für inf, swt, msv

Scheinklausur 2

Wintersemester 2019/20

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (2 Punkte) Seien die Polynome $f_1(X) := X^2 + X + 1$, $f_2(X) := 2X^2 - X - 2$, $f_3(X) := -X^2 + 3X - 2$ und $f_4(X) := -2X^2 + 2X + 1$ in $\mathbb{F}_5[X]$ gegeben.

Bestimmen Sie $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{F}_5$ mit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \neq (0,0,0,0)$ und mit

$$\lambda_1 f_1(X) + \lambda_2 f_2(X) + \lambda_3 f_3(X) + \lambda_4 f_4(X) \;=\; 0\,.$$

$\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = -1$ $\lambda_3 = 2$ $\lambda_4 = 1$

Aufgabe 2 (3 Punkte) Gegeben ist die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1+\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & 1 & 1+\alpha \\ 1+\alpha & 1 & 1+\alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_4^{3\times 3}$.

Bestimmen Sie die Inverse: $A^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1+\alpha & 1+\alpha \\ 1+\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\alpha \end{pmatrix}}$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Gegeben ist die Matrix $A := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{4\times 4}$.

(a) Bestimmen Sie $\chi_A(X) = \boxed{(X+1)^3(X-1)}$.

(b) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert von A die zugehörige algebraische Vielfachheit.

$\boxed{\mathrm{aV}_A(-1) = 3, \quad \mathrm{aV}_A(1) = 1}$

(c) Bestimmen Sie eine Basis des Eigenraums $\mathrm{E}_A(-1)$.

$\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Sei $t \in \mathbb{Q}$ ein Parameter. Sei $A_t := \begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$.

(a) Bestimmen Sie $\chi_{A_t}(X) = \boxed{-(X-2)(X+4)(X-t)}$.

(b) Bestimmen Sie die Menge $\{t \in \mathbb{Q} : A_t \text{ ist nicht diagonalisierbar}\} = \boxed{\{-4\}}$.

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Gegeben ist $A := \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -2 & -7 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$.

Ihr charakteristisches Polynom $\chi_A(X) = -(X+3)^4(X+5)$ ist bekannt.

(a) Bestimmen Sie Basen der folgenden Unterräume von $\mathbb{Q}^{5\times 1}$.

Basis von $\mathrm{E}_A(-3)$: $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$

Basis von $\mathrm{H}_A(-3)$: $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)}$

Basis von $\mathrm{H}_A(-5)$: $\boxed{\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$

(b) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$ so, dass $J := S^{-1}AS$ eine Jordansche Normalform von A ist. Geben Sie J an.

$S = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$ $J = \boxed{\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}}$
