A, B: Aussagen

$\neg A$: nicht A

$A \wedge B$: A und B

$A \vee B$: A oder B

$A \Rightarrow B$: aus A folgt B

$A \Leftrightarrow B$: A ist äquivalent zu B

Wahrheitstafel:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$ (d.h. $\neg A \vee B$)	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	f	w	w	f
f	f	f	f	w	w

M, N : Mengen

$M \cap N = \{ x : x \in M \wedge x \in N \}$

$M \cup N = \{ x : x \in M \vee x \in N \}$

$M \setminus N = \{ x : x \in M \wedge x \notin N \}$

$\mathrm{Pot}(M) = \{ X : X \subseteq M \}$

$M \times N = \{ (m, n) : m \in M, n \in N \}$

M : Menge

$A(x)$: Aussage, abhängig von $x \in M$

$\boxed{\forall x \in M : A(x)}$

heißt:

für alle x in M gilt $A(x)$

Allquantor

$\boxed{\exists x \in M : A(x)}$

heißt:

es gibt ein x in M, so, daß $A(x)$ gilt

Existenzquantor

$$f : M \longrightarrow N \qquad \text{Abbildung}$$
$$m \longmapsto f(m)$$

$$N' \subseteq N$$

$$f^{-1}(N') := \{ m \in M : f(m) \in N' \}$$

Urbild von N' unter f

$$f \text{ heißt } \begin{cases} \textbf{injektiv}, \text{ falls } |f^{-1}(\{n\})| \leq 1 \text{ für } n \in N \\ \textbf{surjektiv}, \text{ falls } |f^{-1}(\{n\})| \geq 1 \text{ für } n \in N \\ \textbf{bijektiv}, \text{ falls } |f^{-1}(\{n\})| = 1 \text{ für } n \in N \end{cases}$$

dann $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Urbild nehmen}}}{f^{-1}(\{n\})} = \{ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Umkehrabb.}}}{f^{-1}(n)} \}$

M, N : Mengen

Eine **Relation** R zwischen M und N ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times N$

$$m \, R \, n \; :\Longleftrightarrow \; (m, n) \in R$$

M : Menge

R : Relation auf M, also $R \subseteq M \times M$

R **reflexiv** $:\Longleftrightarrow (\forall m \in M : m R m)$

R **symmetrisch** $:\Longleftrightarrow (\forall m, m' \in M : m R m' \Rightarrow m' R m)$

R **identitiv** $:\Longleftrightarrow (\forall m, m' \in M : m R m' \wedge m' R m \Rightarrow m = m')$

R **transitiv** $:\Longleftrightarrow (\forall m, m', m'' \in M : m R m' \wedge m' R m'' \Rightarrow m R m'')$

R **Ordnungsrelation** $:\Longleftrightarrow$ R refl., ident., trans.

R **Äquivalenzrelation** $:\Longleftrightarrow$ R refl., symm., trans.

$(\sim)$ Äq'rel. auf M, $m \in M$

Äquivalenzklasse von m :

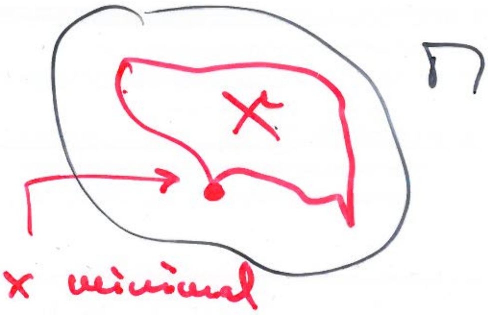
$[m] = [m]_{(\sim)} :\Longleftrightarrow \{x \in M : x \sim m\}$

Jedes Element von M liegt in genau einer Äquivalenzklasse.

$M/(\sim) := \{[m]_{(\sim)} : m \in M\}$: Menge der Äq'klassen.

M : Menge, $(\leq)$: Ordnungsrelation auf M

M heißt induktiv geordnet, wenn jede nichtleere Teilmenge $X \subseteq M$ wenigstens ein minimales Element hat:



Allgemeines Induktionsprinzip:

M: induktiv geordnet

$A(x)$: Aussage für $x \in M$

Wollen: $A(x)$ gilt für $x \in M$

Zu zeigen: $(\forall z \in M \text{ mit } z < x : A(z)) \overset{!}{\Longrightarrow} A(x)$, für $x \in M$

Spezielles Induktionsprinzip:

$k \in \mathbb{Z}$, $A(z)$: Aussage für $z \in \mathbb{Z}_{\geq k}$

Wollen: $A(z)$ gilt für $z \in \mathbb{Z}_{\geq k}$

Zu zeigen:
- $A(k)$ (Induktionsanfang)
- $A(z-1) \overset{!}{\Longrightarrow} A(z)$, für $z \in \mathbb{Z}_{\geq k+1}$ (Induktionsschritt)

$k \geq 0$: $\quad k! = \prod_{j=1}^{k} j = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$

"k Fakultät"

$0 \leq a \leq b$: $\quad \binom{b}{a} := \frac{b!}{a!\,(b-a)!}$

Binomialkoeffizient "b über a"

Binomischer Lehrsatz:

Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ist

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$= \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \ldots + \binom{n}{n} x^{n-n} y^0$$

Pascalsches Dreieck

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & & & \vdots & & & \end{array}$$

$\binom{3}{2}$

$\Rightarrow$

z.B.

$$(x+y)^3$$

$$= 1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 y + 3 x y^2 + 1 y^3$$

$m, n \in \mathbb{Z}$

$g := ggT(m,n)$ (größter gemeinsamer Teiler)

ist definiert durch:

"teilt"

(1) $g \mid m \wedge g \mid n$

(2) $\exists\, s,t \in \mathbb{Z} : g = sm + tn$

Berechnung des ggT durch Euklidischen Algorithmus:

$0 \leq m < n$

$u_1 := n$

$u_2 := m$

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= u_2 \cdot h_1 + u_3 \\ u_2 &= u_3 \cdot h_2 + u_4 \\ &\;\vdots \\ u_{\ell-2} &= \underbrace{u_{\ell-1}}_{= ggT(m,n)} \cdot h_{\ell-2} + \underbrace{u_\ell}_{= 0 \,:\, \text{Abbruchbedingung}} \end{aligned}\right\} \text{jeweils Division mit Rest}$$

<u>Beh</u>: Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$.

Auf eindeutige Weise gibt es $k \in \mathbb{N}$ und Primzahlen

$$p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_k$$

mit

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k .$$

<u>Existenz</u>: Gesichert mit Induktion.

<u>Eindeutigkeit</u>: ∇ $\circ$

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$:

Restklasse modulo n,
$[z]_n = \{ z + nw : w \in \mathbb{Z} \}$

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} := \{ [z]_n : z \in \mathbb{Z} \}$$

$$\underbrace{\phantom{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}}_{} = \{ [0]_n, [1]_n, \ldots, [n-1]_n \}$$

"$\mathbb{Z}$ modulo $n\mathbb{Z}$"

$$[a]_n + [b]_n = [a+b]_n$$

$$[a]_n \cdot [b]_n = [a \cdot b]_n$$

In $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ist

$(\cdot)$	$[0]_5$	$[1]_5$	$[2]_5$	$[3]_5$	$[4]_5$
$[0]_5$	$[0]_5$	$[0]_5$	$[0]_5$	$[0]_5$	$[0]_5$
$[1]_5$	$[0]_5$	$[1]_5$	$[2]_5$	$[3]_5$	$[4]_5$
$[2]_5$	$[0]_5$	$[2]_5$	$[4]_5$	$[1]_5$	$[3]_5$
$[3]_5$	$[0]_5$	$[3]_5$	$[1]_5$	$[4]_5$	$[2]_5$
$[4]_5$	$[0]_5$	$[4]_5$	$[3]_5$	$[2]_5$	$[1]_5$

Vereinbarte Kurzschreibweise: In $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ist

$(\cdot)$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

$K = (K, +, \cdot)$ Körper :

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & (K,+) \text{ abelsche Gruppe} \\ (2) & (K,\cdot) \text{ abelsches Monoid} \\ (3) & (x+x')\cdot(y+y') = x\cdot y + x'\cdot y + x\cdot y' + x'\cdot y' \text{ stets} \end{array}\right\} \text{kommutativer Ring}$$

(4) $0 \neq 1$

(5) $\forall\, x \in K\setminus\{0\} \;\; \exists\, y \in K : \; x\cdot y = 1$

Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$.
Es ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ein kommutativer Ring.

Lemma

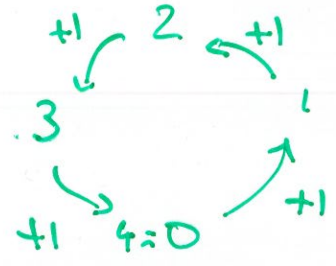
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ Körper $\iff$ n prim

$\Longrightarrow$: gezeigt

$\Longleftarrow$: !

Fußnote:

$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$:



⇝ Ring mit

K : Körper

$K[X] = \{ f(X) : f(X)$ ist Polynom mit Koeffizienten in $K \}$

Polynomdivision:

Seien $f(X), g(X) \in K[X]$, $g(X) \neq 0$

Dann gibt es $h(X), r(X) \in K[X]$

mit

$$f(X) = g(X) \cdot h(X) + r(X),$$

wobei $\underbrace{\deg(r(X)) < \deg(g(X))}_{\text{schließt } r(X)=0 \text{ und ein, da } \deg(0) = -\infty}$

Grad

K : Körper

$f(X) = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_0 X^0 \in K[X]$ irreduzibel

$K[X]/f(X)K[X]$: Körpererweiterung

Darin : $x := [X]_{f(X)}$

Regel : $f(x) = 0$, dh. $x^n = -a_{n-1}x^{n-1} - \ldots - a_0 x^0$

Jedes Element darin ist von der Form

$$b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_0 x^0 \quad ⊛$$

mit eindeutig bestimmten $b_0, \ldots, b_{n-1} \in K$.

$K = \mathbb{R}$, $f(X) = X^2 + 1$

$\mathbb{C} := \mathbb{R}[X]/(X^2+1)\mathbb{R}[X]$

$i := [X]_{X^2+1} \rightsquigarrow 0 = f(i) = i^2 + 1$,

dh. $\boxed{i^2 = -1}$

$$\mathbb{C} = \{ \underbrace{a + bi}_{⊛} : a, b \in \mathbb{R} \}$$

$K = \mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$, $f(X) = X^2 + X + 1$

$\mathbb{F}_4 := \mathbb{F}_2[X]/(X^2+X+1)\mathbb{F}_2[X]$

$\alpha := [X]_{X^2+X+1} \rightsquigarrow 0 = f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha + 1$,

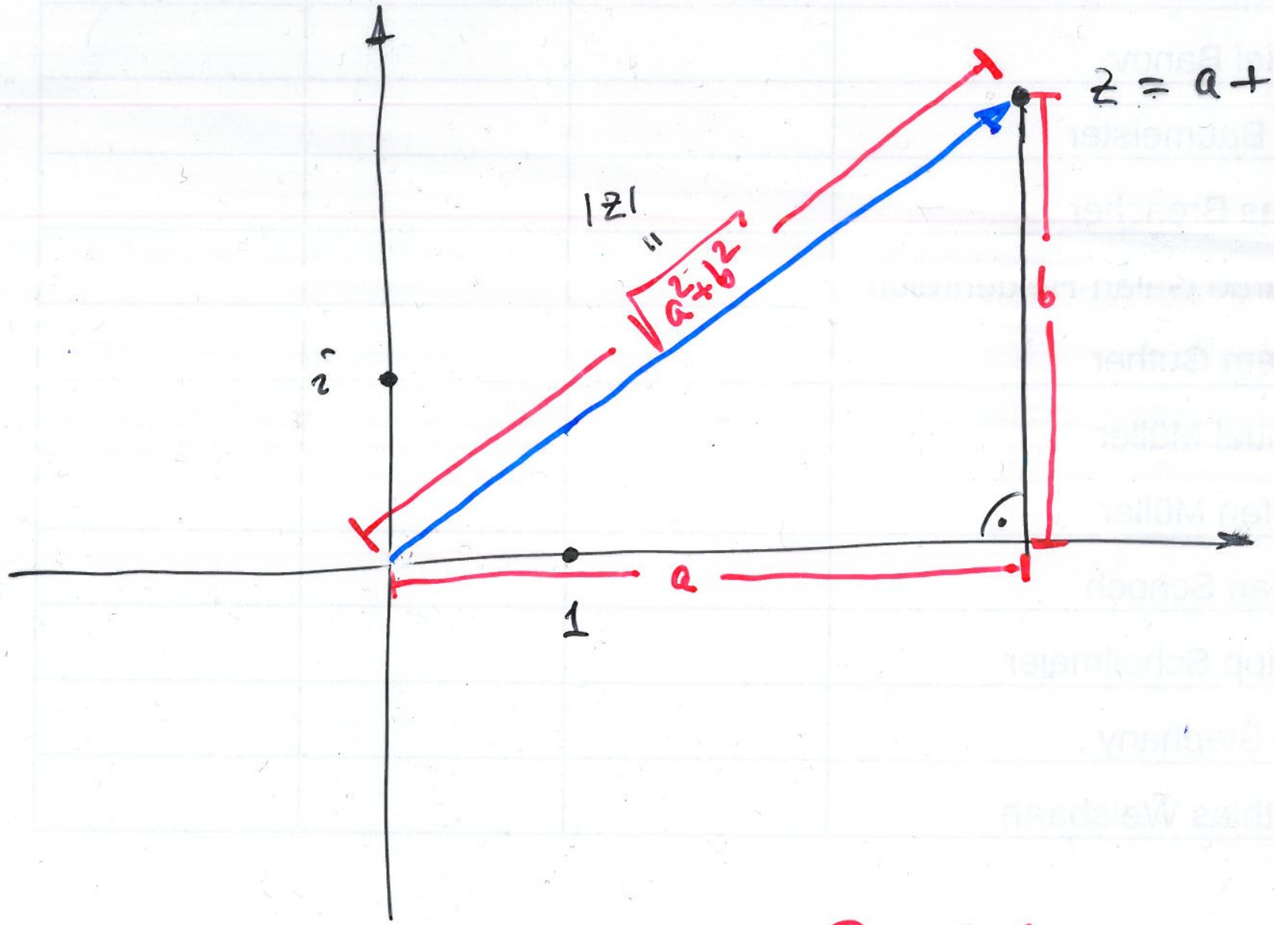
dh. $\boxed{\alpha^2 = \alpha + 1}$

Über $\mathbb{F}_2 \Rightarrow \boxed{0 = 2}$

$$\mathbb{F}_4 = \{ \underbrace{a + b\alpha}_{⊛} : a, b \in \mathbb{F}_2 \} = \{0, 1, \alpha, 1+\alpha\}$$

Beachte: $\mathbb{F}_4 \neq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

$z = a + bi \in \mathbb{C}$ in der Gaußschen Zahlenebene:



$a =: \mathrm{Re}(z)$: Realteil von z

$b =: \mathrm{Im}(z)$: Imaginärteil von z

$\sqrt{a^2+b^2} =: |z|$: Betrag von z

$\bar{z} := a - bi$: zu z komplex konjugierte Zahl

$$|z|^2 = a^2+b^2 = (a+bi)(a-bi) = z \cdot \bar{z}$$

Ein Körper K heißt algebraisch abgeschlossen, falls für jedes $f(X) \in K[X]$ mit $\deg(f(X)) \geq 1$ ein $a \in K$ existiert mit $f(a) = 0$.

Dann: $f(X)$ ist Produkt von Polynomen von Grad 1

$\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen.

Aber: i.a. keine Formel für Nullstelle!

Suchen Nullstellen in $\mathbb{Q}$ von

$$f(X) = \underbrace{a_n}_{\neq 0} X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + \underbrace{a_0}_{\neq 0} X^0 \in \mathbb{Z}[X]$$

Ist $f\left(\frac{u}{v}\right) = 0$, mit $u, v \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ teilerfremd, dann gilt:

$$u \mid a_0 \quad \wedge \quad v \mid a_n$$

Also: alle Nullstellen in $\mathbb{Q}$ durch Testen aller $\frac{u}{v}$ mit $u \mid a_0$, $v \mid a_n$, u, v teilerfremd, ob denn $f\left(\frac{u}{v}\right) = 0$ ist.

u, v positiv oder negativ

K : Körper

$$A = (a_{i,j})_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in K^{m \times n}$$

Matrix mit Einträgen $a_{i,j} \in K$

$$A = (a_{i,j})_{i,j} \in K^{m \times n}, \quad B = (b_{j,k})_{j,k} \in K^{n \times p}$$

$$\underset{m \times n = n \times p}{A \cdot B} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, b_{j,k} \right)_{i,k} \in K^{m \times p}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 3 \quad 5} \\ 2 \quad -1 \quad 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & \boxed{5} \\ 1 & \boxed{2} \\ -1 & \boxed{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \overbrace{\boxed{11}}^{1 \cdot 5 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 0} \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A^t = (a_{i,j})_{j,i} \in K^{n \times m}$$: Transponierte

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

Lineares Gleichungssystem

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 11$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3$$

Suchen: Lösungsmenge $\{x \in \mathbb{R}^{4\times 1} : Ax = b\}$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \overbrace{2 & 2 & -1 & 5}^{A} & \overbrace{11}^{b} \\ \boxed{1} & 1 & 2 & 5 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow -2 \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{-5} & -5 & 5 \end{array}\right) \cdot\left(-\frac{1}{5}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow -2 \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$ Zeilenstufenform

$$\Rightarrow \{x \in \mathbb{R}^{4\times 1} : Ax = b\}$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{5} \\ \boxed{0} \\ \boxed{-1} \\ \boxed{0} \end{pmatrix} + {}_{\mathbb{R}}\left\langle \begin{pmatrix} \boxed{-1} \\ \boxed{1} \\ \boxed{-0} \\ \boxed{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxed{-3} \\ \boxed{0} \\ \boxed{-1} \\ \boxed{1} \end{pmatrix} \right\rangle$$

Probe: $A \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

K : Körper

V : K-Vektorraum — $(V, +)$ abelsche Gruppe, ferner $\underbrace{\lambda}_{\in K} \cdot \underbrace{v}_{\in V}$ mit üblichen Regeln

$(v_1, \dots, v_n)$: Tupel von Vektoren in V

z.B. $V = K^{m \times 1}$

- $_K\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$

  $:= \{ \underbrace{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n}_{\text{Linearkombination}} : \lambda_i \in K \text{ für } 1 \leq i \leq n \}$

  Aufspann oder Erzeugnis

- $(v_1, \dots, v_n)$ erzeugend in V

  $:\Longleftrightarrow \; _K\langle v_1, \dots, v_n \rangle = V$

- $(v_1, \dots, v_n)$ linear unabhängig

  $:\Longleftrightarrow$ für $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ gilt

  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$

- $(v_1, \dots, v_n)$ Basis von V,

  falls erzeugend in V und linear unabhängig

- $(v_1, \dots, v_n)$ Basis von V

  $\Rightarrow n =: \dim(V) = \dim_K(V)$, Dimension von V

<u>Lemma:</u> In $K^{m\times 1}$ sei ein Tupel $(v_1,\dots,v_n)$ von Vektoren gegeben.

Sei $A = \left(\boxed{v_1} \; \boxed{v_2} \; \cdots \; \boxed{v_n} \right) \in K^{m\times n}$

(1) $(v_1,\dots,v_n)$ erzeugend in $K^{m\times 1}$

$\Longleftrightarrow$ ZSF von A hat keine Nullzeile

(2) $(v_1,\dots,v_n)$ linear unabhängig

$\Longleftrightarrow$ ZSF von A hat keine Nichtstufenspalte

(3) $(v_1,\dots,v_n)$ Basis

$\Longleftrightarrow$ $m = n$ und ZSF von A ist E_n

K: Körper

V: K-Vektorraum

$U \subseteq V$ heißt Unterraum (UR)

falls:

- $0 \in U$
- für $\lambda, \lambda' \in K$ und $u, u' \in U$ ist auch

$$\lambda u + \lambda' u' \in U$$

Bsp: $v_1, \ldots, v_n$ aus V

$\Rightarrow$ $_K\langle v_1, \ldots, v_n \rangle \subseteq V$ ist UR

Bsp: $A \in K^{m \times n}$

$\Rightarrow$ $\{ x \in K^{n \times 1} : Ax = 0 \} \subseteq K^{n \times 1}$

ist Unterraum

Basis dazu aus Gaußverfahren

Sei $n \geq 0$.

Seien $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$

- Das **Skalarprodukt** von a und b ist

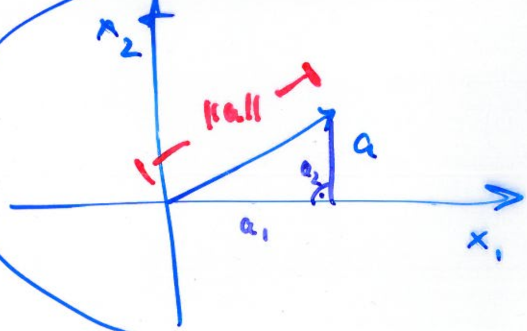
$$a^t b = (a_1 \dots a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

$$= b^t a$$

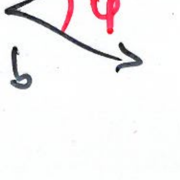
- Die **Norm** oder **Länge** von a ist

$$\sqrt{a^t a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$



- Cauchy-Schwarz:

$$|a^t b| \leq \|a\| \cdot \|b\|$$

- 

$$\Longrightarrow \cos(\varphi) = \frac{a^t b}{\|a\| \cdot \|b\|}$$

K : Körper

U, V : Vektorräume

Def. $f: U \to V$ ist K-linear, falls

für $\lambda, \lambda' \in K$, $u, u' \in U$ gilt:

$$f(\lambda u + \lambda' u') = \lambda f(u) + \lambda' f(u')$$

"f verträgt sich mit Linearkombinationen zweier Vektoren"

Bsp. Sei $A \in K^{m \times n}$.

$$\mathrm{mult}_A : K^{n \times 1} \longrightarrow K^{m \times 1}$$
$$x \longmapsto A \cdot x$$

ist eine K-lineare Abbildung

K : Körper

U, V : K-Vektorräume, endlich Dim.

$f : U \to V$: K-lineare Abbildung

$B := (b_1, \dots, b_m)$: Basis von U

$C := (c_1, \dots, c_n)$: Basis von V

$$\underbrace{U}_{\text{Basis } B} \xrightarrow{\quad f \quad} \underbrace{V}_{\text{Basis } C}$$

$$u \in U \quad \Rightarrow \quad u = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_m b_m$$

$$\Rightarrow \quad {}_B u := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \in K^{m \times 1} :$$

Koordinatenvektor von u bzgl. B

$${}_C f_B = \begin{bmatrix} {}_C f(b_1) & {}_C f(b_2) & \cdots & {}_C f(b_m) \end{bmatrix}$$

$$\in K^{n \times m} :$$

beschreibende Matrix von f bzgl. B und C

K : komm. Ring

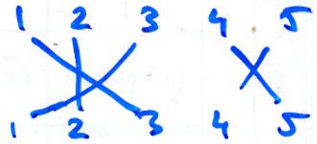
$n \geq 0$

$A = (a_{i,j}) \in K^{n \times n}$

$\sigma \in S_n$

$\mathrm{fehl}(\sigma) := \left| \{ (i,j) : 1 \leq i < j \leq n, \ \sigma(i) > \sigma(j) \} \right|$

$\mathrm{sgn}(\sigma) := (-1)^{\mathrm{fehl}(\sigma)}$: Signum

Bsp: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ 

$\rightsquigarrow \mathrm{fehl}(\sigma) = \left| \{ (1,2), (1,3), (2,3), (4,5) \} \right| = 4 \rightarrow \mathrm{sgn}(\sigma) = +1$

$$\det A := \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

Determinante

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{cases} a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} + a_{1,2} a_{2,3} a_{3,1} + a_{1,3} a_{2,1} a_{3,2} \\ - a_{1,2} a_{2,1} a_{3,3} - a_{1,1} a_{2,3} a_{3,2} - a_{1,3} a_{2,2} a_{3,1} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \end{array} \right)$$

K : Körper

$n \geq 0$

$A = (a_{ij})_{ij} \in K^{n \times n}$

$\lambda \in K$ heißt **Eigenwert** von A,

falls es $x \in K^{n \times 1} \setminus \{0\}$ gibt mit

$$A \cdot x = \lambda \cdot x$$

Ein solches x heißt **Eigenvektor** zu λ.

$$E_A(\lambda) := \{ x \in K^{n \times 1} : Ax = \lambda x \}$$
$$= \operatorname{Kern}(A - \lambda E_n) \subseteq K^{n \times 1}$$

heißt **Eigenraum** zu λ.

$$\chi_A(X) := \det(A - X E_n) \in K[X]$$

heißt **charakteristisches Polynom** von A.

Für $\lambda \in K$ gilt:

λ ist Eigenwert von $A \iff \chi_A(\lambda) = 0$

K : Körper

$n \geq 0$

$A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$

Das charakteristische Polynom $\chi_A(X) \in K[X]$ zerfalle,

$$\chi_A(X) = (X - \underbrace{\lambda_1}_{})^{aV_A(\lambda_1)} \cdot \ldots \cdot (X - \underbrace{\lambda_k}_{})^{aV_A(\lambda_k)}$$

Eigenwerte von A

Abkürzung: $A_{(i)} := A - \lambda_i E_n \in K^{n \times n}$

Dann:

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Kern}(A_{(i)}) & = & E_A(\lambda_i) \\
\cap\!| & & \text{Eigenraum} \\
\mathrm{Kern}(A_{(i)}^2) & & \\
\cap\!| & & \\
\mathrm{Kern}(A_{(i)}^3) & & \\
\cap\!| & & \\
\vdots & & \\
\cap\!| & & \\
\mathrm{Kern}(A_{(i)}^{aV_A(\lambda_i)}) & =: & H_A(\lambda_i) \\
\| & & \text{Hauptraum} \\
\mathrm{Kern}(A_{(i)}^{aV_A(\lambda_i)+1}) & & \\
\| & & \\
\vdots & &
\end{array}$$

K : Körper

$n \geq 0$

$A = (a_{ij})_{i,j} \in K^{n \times n}$

$\chi_A(X) \in K[X]$ zerfalle

$\lambda_1, \ldots, \lambda_k$: paarweise verschiedene Eigenwerte von A

$1 \leq i \leq k$

$$A_{(i)} := A - \lambda_i E_n \in K^{n \times n}$$

$$\boxed{(x_{1,1}, \ldots, x_{1,t_1})} : \text{Basis von } \operatorname{Kern}(A_{(i)}^1) = E_A(\lambda_i)$$

$$\cap$$

$$\boxed{(x_{1,1}, \ldots, x_{1,t_1}, x_{2,1}, \ldots, x_{2,t_2})} : \text{Basis von } \operatorname{Kern}(A_{(i)}^2)$$

$$\cap$$

$$\boxed{(x_{1,1}, \ldots, x_{1,t_1}, x_{2,1}, \ldots, x_{2,t_2}, x_{3,1}, \ldots, x_{3,t_3})} : \text{Basis von } \operatorname{Kern}(A_{(i)}^3)$$

$$\cap$$

$$\vdots$$

$$\cap$$

$$\boxed{(x_{1,1}, \ldots, x_{1,t_1}, x_{2,1}, \ldots, x_{2,t_2}, \ldots, x_{\ell,1}, \ldots, x_{\ell,t_\ell})} : \text{Basis von } \operatorname{Kern}(A_{(i)}^\ell) = H_A(\lambda_i)$$

jeweils ergänzt

Jordan: Grobes Vorgehen

- $A \in K^{n \times n}$ gegeben
- $\chi_A(X) \rightsquigarrow$ Eigenwerte, alg. Vfh.
- zu $\underbrace{\mathrm{Kern}(A_{(i)}^{1})}_{E_A(\lambda_i)} \subset \mathrm{Kern}(A_{(i)}^{2}) \subset \dots \subset \underbrace{\mathrm{Kern}(A_{(i)}^{\ell})}_{H_A(\lambda_i)}$

  Schrittweise ergänzte Basen ("Vektoren $x_{m,i}$")
- Prozeß "rückwärts durchlaufen",

  Basis von $H_A(\lambda_i)$ aus "Vektoren $A_{(i)}^{s}\, y_{\ell,j}$" bauen. Zu Hauptvektorketten zusammenfügen.
- Hauptvektorketten in Matrix $S \in K^{n \times n}$

  $\rightsquigarrow S^{-1} A S = J$ in Jordanscher Normalform

---

Bsp:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{6 \times 6}$$

$$\chi_A(X) = \dots = \det \begin{pmatrix} -X & X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -X & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1-X & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1-X & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & X & -X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X & -X \end{pmatrix} = ?$$

[zu tun]

Schrittweise ergänzte Basis zu $H_A(0)$

$$\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_{1,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_{1,2}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{x_{1,3}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_{2,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_{2,2}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_{3,1}} \right)$$

$\underbrace{x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}}$: Basis von $\operatorname{Kern}(A^1_{(1)}) = \underset{\text{Eigenraum}}{E_A(0)}$

$\underbrace{x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{2,1}, x_{2,2}}$: Basis von $\operatorname{Kern}(A^2_{(1)})$

$\underbrace{x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{2,1}, x_{2,2}, x_{3,1}}$: Basis von $\operatorname{Kern}(A^3_{(1)}) = \underset{\text{Hauptraum}}{H_A(0)}$

$n \geq 0$

$V \subseteq \mathbb{R}^{n \times 1}$ Teilraum

$m := \dim_{\mathbb{R}} V$

$(d_1, \dots, d_m)$: Tupel mit $d_j \in V$ für $1 \leq j \leq m$

Es heißt $(d_1, \dots, d_m)$ eine Orthonormalbasis,

falls $\underbrace{d_j^t d_k}_{\text{Skalarprodukt}} = \underbrace{\delta_{j,k}}_{\text{[Kronecker-delta]}} = \begin{cases} 1 & \text{falls } j = k \\ 0 & \text{falls } j \neq k \end{cases}$

ist für $1 \leq j \leq m$, $1 \leq k \leq m$.

Somit ist $(d_1, \dots, d_m)$ eine Orthonormalbasis,

falls gilt:

- d_j hat Länge $\|d_j\| = 1$ für $1 \leq j \leq k$
- d_j und d_k stehen senkrecht, falls $j \neq k$

$n \geq 0$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ quadratisch

A heißt **symmetrisch**, falls $A = A^t$.

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 7 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ ist symmetrisch.

A symmetrisch $\Rightarrow$ A diagonalisierbar

A heißt **orthogonal**, falls $A^t \cdot A = E_n$.

A orthogonal $\Leftrightarrow$ in den Spalten von A steht eine Orthonormalbasis

Bsp.: $A = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ ist orthogonal.