Künzer, Nitsche, Ritter

Mathematik 1 für inf, swt, msv

Lösung 8

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 29 Gegeben sind

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 10 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -12 \\ -8 \\ 13 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 1}.$$

(a) Formen Sie $(A|b)$ um, bis Zeilenstufenform erreicht ist.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$.

(c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des inhomogenen linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

Lösung.

(a) Wir verwenden das Gaußverfahren um $(A|b)$ in Zeilenstufenform zu überführen.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & -4 & -2 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & -2 & 10 & 1 & 0 & -12 \\ -1 & -1 & -3 & -1 & 1 & -8 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 1 & 13 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -2 & 10 & 1 & 0 & -12 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 9 & 3 & 3 & 9 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 20 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{5} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 3 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

(b) Die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ ist also gegeben durch

$$\{\, x \in \mathbb{R}^{5\times 1} \,:\, Ax = 0 \,\} = {}_{\mathbb{R}}\left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ \boxed{1} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Alternative können wir dies auch als Menge ausdrücken.

$$\{\, x \in \mathbb{R}^{5\times 1} \;:\; Ax = 0 \,\} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ \boxed{1} \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Bemerkung: Die Kästchen bei der Angabe der Lösungsmenge sind nur als Hilfestellung gedacht und müssen nicht geschrieben werden.

(c) Da die letzte Zeile der Zeilenstufenform nicht erfüllbar ist, ist die Lösungsmenge des inhomogenen linearen Gleichungssystems $Ax = b$ leer.

$$\{\, x \in \mathbb{R}^{5\times 1} \;:\; Ax = b \,\} = \emptyset$$

Hausaufgabe 30 Gegeben sind

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1-\iota & \iota & -\iota \\ -1 & -\iota & -1 & \iota & -1+\iota & 1 \\ \iota & -1 & -\iota & -1+\iota & \iota & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_9^{3\times 6}, \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -1+\iota \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_9^{3\times 1}.$$

(a) Formen Sie $(A|b)$ um, bis Zeilenstufenform erreicht ist.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$.

(c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des inhomogenen linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

Lösung.

(a) Wir verwenden das Gaußverfahren um $(A|b)$ in Zeilenstufenform zu überführen. Dazu vertauschen wir im ersten Schritt die ersten beiden Zeilen.

$$(A|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} -1 & -\iota & -1 & \iota & -1+\iota & 1 & -1+\iota \\ 0 & 0 & 1 & 1-\iota & \iota & -\iota & -1 \\ \iota & -1 & -\iota & -1+\iota & \iota & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & \iota & 1 & -\iota & 1-\iota & -1 & 1-\iota \\ 0 & 0 & 1 & 1-\iota & \iota & -\iota & -1 \\ 0 & 0 & \iota & 1+\iota & -1 & \iota & -1-\iota \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & \iota & 0 & -1 & 1+\iota & -1+\iota & -1-\iota \\ 0 & 0 & 1 & 1-\iota & \iota & -\iota & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1+\iota & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & \iota & 0 & -1 & 1+\iota & 0 & -\iota \\ 0 & 0 & 1 & 1-\iota & \iota & 0 & -\iota \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1-\iota \end{array}\right)$$

(b) Die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ ist also gegeben durch

$$\{\, x \in \mathbb{F}_9^{6\times 1} \;:\; Ax = 0 \,\} = {}_{\mathbb{F}_9}\left\langle \begin{pmatrix} -\iota \\ \boxed{1} \\ 0 \\ \boxed{0} \\ \boxed{0} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{0} \\ -1+\iota \\ \boxed{1} \\ \boxed{0} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1-\iota \\ \boxed{0} \\ -\iota \\ \boxed{0} \\ \boxed{1} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Alternative können wir dies auch als Menge ausdrücken.

$$\{\, x \in \mathbb{F}_9^{6\times 1} \;:\; Ax = 0 \,\} = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} -\iota \\ \boxed{1} \\ 0 \\ \boxed{0} \\ \boxed{0} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{0} \\ -1+\iota \\ \boxed{1} \\ \boxed{0} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1-\iota \\ \boxed{0} \\ -\iota \\ \boxed{0} \\ \boxed{1} \\ 0 \end{pmatrix} \;:\; \lambda_1,\ \lambda_2\ \lambda_3 \in \mathbb{F}_9 \right\}$$

(c) Die Lösungsmenge des inhomogenen linearen Gleichungssystems $Ax = b$ ist gegeben durch

$$\{\, x \in \mathbb{F}_9^{6\times 1} \;:\; Ax = b \,\} = \begin{pmatrix} -\iota \\ \boxed{0} \\ -\iota \\ \boxed{0} \\ \boxed{0} \\ -1-\iota \end{pmatrix} +_{\mathbb{F}_9} \left\langle \begin{pmatrix} -\iota \\ \boxed{1} \\ 0 \\ \boxed{0} \\ \boxed{0} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{0} \\ -1+\iota \\ \boxed{1} \\ \boxed{0} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1-\iota \\ \boxed{0} \\ -\iota \\ \boxed{0} \\ \boxed{1} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Alternative können wir dies auch als Menge ausdrücken.

$$\{\, x \in \mathbb{F}_9^{6\times 1} \;:\; Ax = b \,\} = \left\{ \begin{pmatrix} -\iota \\ \boxed{0} \\ -\iota \\ \boxed{0} \\ \boxed{0} \\ -1-\iota \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -\iota \\ \boxed{1} \\ 0 \\ \boxed{0} \\ \boxed{0} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{0} \\ -1+\iota \\ \boxed{1} \\ \boxed{0} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1-\iota \\ \boxed{0} \\ -\iota \\ \boxed{0} \\ \boxed{1} \\ 0 \end{pmatrix} \;:\; \lambda_1,\ \lambda_2\ \lambda_3 \in \mathbb{F}_9 \right\}$$

Bemerkung: Die Kästchen bei der Angabe der Lösungsmenge sind nur als Hilfestellung gedacht und müssen nicht geschrieben werden.

Hausaufgabe 31 Entscheiden Sie, welche der folgenden Matrizen invertierbar sind, und bestimmen Sie in diesem Fall die inverse Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{3\times 3}$$

Lösung. Wir verwenden jeweils das Gaußverfahren zum Überprüfen der Invertierbarkeit und gegebenenfalls zum Bestimmen der inversen Matrix.

(a)

$$(A|\mathrm{E}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

Also ist $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

(b)

$$(B|\mathrm{E}_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Also ist B nicht invertierbar, da auf der linken Seite keine Einheitsmatrix mehr entstehen kann.

(c)

$$(C|\mathrm{E}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Also ist $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Alternativ ist auch $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ da die Einträge der Matrix in $\mathbb{F}_3$ liegen.

Hausaufgabe 32 Gegeben sind die folgenden von einem Parameter $s \in \mathbb{R}$ abhängigen Vektoren in $\mathbb{R}^{4\times 1}$.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_s = \begin{pmatrix} 2s \\ -6s \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(a) Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist (v_1, v_2, v_3, w_s) linear abhängig?

(b) Zeigen Sie, dass (v_1, v_2, v_3) linear unabhängig ist.

(c) Bestimmen Sie ein $w \in \mathbb{R}^{4\times 1}$ so, dass (v_1, v_2, v_3, w) eine Basis von $\mathbb{R}^{4\times 1}$ ist.

Lösung. Sei $A_s := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2s \\ 0 & 0 & -2 & -6s \\ -1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Das Gaußverfahren liefert die folgende Umformung von A_s.

$$A_s \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2s \\ 0 & 0 & -2 & -6s \\ 0 & 2 & 4 & 3+2s \\ 0 & -2 & 0 & -1-2s \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2s \\ 0 & 2 & 4 & 3+2s \\ 0 & 0 & -2 & -6s \\ 0 & -2 & 0 & -1-2s \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2s \\ 0 & 1 & 2 & \frac{3}{2}+s \\ 0 & 0 & -2 & -6s \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2s \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2}-5s \\ 0 & 0 & 1 & 3s \\ 0 & 0 & 0 & 2-12s \end{pmatrix}$$

Es ist (v_1, v_2, v_3, w_s) genau dann linear unabhängig, wenn die Zeilenstufenform von A genau 4 Nichtnullzeilen enthält.

Damit (v_1, v_2, v_3, w_s) linear abhängig ist, muss also $2 - 12s = 0$ und damit $s = \frac{1}{6}$ sein, damit eine Nullzeile entsteht.

(b) Die gleichen Umformungsschritte aus Teil (a) liefern für B die folgende Zeilenstufenform.

$$B \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist (v_1, v_2, v_3) linear unabhängig, denn die Zeilenstufenform von B enthält genau 3 Nichtnullzeilen.

(c) Damit (v_1, v_2, v_3, w) eine Basis sein kann, muss das Tupel linear unabhängig sein. Aus Teil (a) wissen wir, das (v_1, v_2, v_3, w_s) für $s \neq \frac{1}{6}$ linear unabhängig ist. Daher wählen wir zum Beispiel $s = 0$ und erhalten das linear unabhängige Tupel (v_1, v_2, v_3, w_0).

Da $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{4\times 1}) = 4$ und da das Tupel genau 4 Elemente enthält, ist (v_1, v_2, v_3, w_0) eine Basis von $\mathbb{R}^{4\times 1}$.

Alternativ können wir auch nachrechnen, dass (v_1, v_2, v_3, w_0) eine Basis von $\mathbb{R}^{4\times 1}$ ist. Dazu bringen wir A_0 auf Zeilenstufenform, wobei wir im ersten Schritt die bereits aus Teil (a) bekannten Umformungsschritte durchführen.

$$A_0 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also ist (v_1, v_2, v_3, w_0) eine Basis von $\mathbb{R}^{4\times 1}$, denn A_0 hat die Zeilenstufenform E_4.