Mathematik 1 für inf, swt, msv

Lösung 2

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 5

(a) Skizzieren Sie den Graphen von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0} : x \mapsto (x^2 - 4)^2$.
Untersuchen Sie f anhand der Skizze auf Injektivität und Surjektivität.

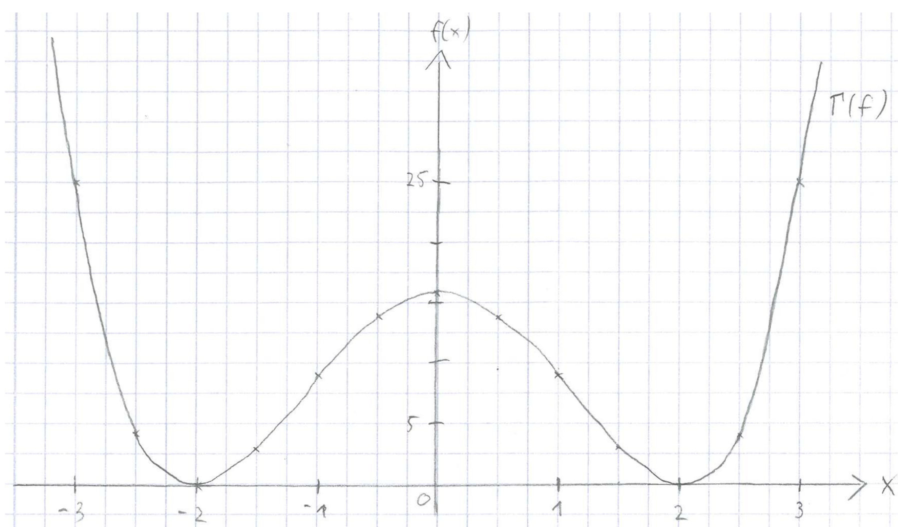
(b) Skizzieren Sie den Graphen von $g : [1, 2] \to [0, 9] : x \mapsto (x^2 - 4)^2$.
Untersuchen Sie g anhand der Skizze auf Injektivität und Surjektivität.

(c) Skizzieren Sie den Graphen von $h : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}_{>0} : x \mapsto \dfrac{1}{\sin(2x)}$.
Untersuchen Sie h anhand der Skizze auf Injektivität und Surjektivität.

(d) Sei $P := \{\, X \in \operatorname{Pot}(\mathbb{N}) \,:\, X \text{ ist endlich} \,\}$.
Untersuchen Sie $\kappa : P \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0} : M \mapsto |M|$ auf Injektivität und Surjektivität.

Lösung.

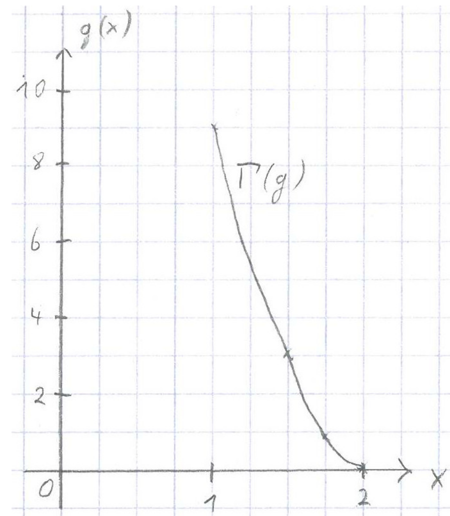
(a) Skizze des Graphen von f.



Injektivität. Wir betrachten die Gerade parallel zur x-Achse durch den Punkt $(0, 25)$. Anhand der Skizze sehen wir, dass diese zwei Schnittpunkte mit dem Graphen von f, an den Stellen $x_1 = -3$ und $x_2 = 3$, besitzt. Also ist $f^{-1}(\{25\}) = \{-3, 3\}$ und f ist nicht injektiv.

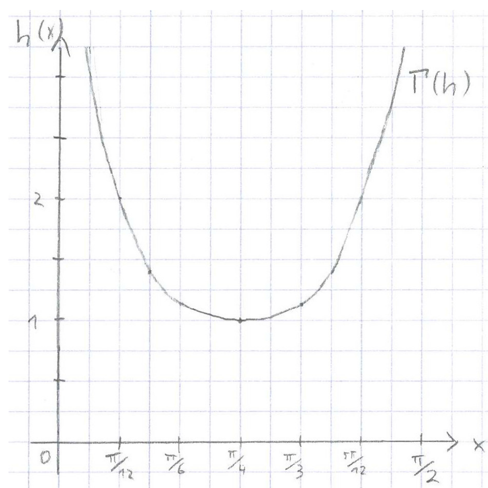
Surjektivität Für $a \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ betrachten wir die Gerade parallel zur x-Achse durch den Punkt $(0, a)$. Anhand der Skizze sehen wir, dass jede solche Gerade mindestens einen Schnittpunkt mit dem Graphen von f besitzt. Also ist f surjektiv.

(b) Skizze des Graphen von g.



Für $a \in [0,9]$ betrachten wir die Gerade parallel zur x-Achse durch den Punkt $(0,a)$. Anhand der Skizze sehen wir, dass jede solche Gerade genau einen Schnittpunkt mit dem Graphen von g im Bereich $[1,2]$ besitzt. Also ist g injektiv und surjektiv.

(c) Skizze des Graphen von h.



Injektivität. Wir betrachten die Gerade parallel zur x-Achse durch den Punkt $(0,2)$. Anhand der Skizze sehen wir, dass diese zwei Schnittpunkte mit dem Graphen von h, an den Stellen $x_1 = \frac{\pi}{12}$ und $x_2 = \frac{5\pi}{12}$, besitzt. Also ist $h^{-1}(\{2\}) = \{\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\}$ und h ist nicht injektiv.

Surjektivität Wir betrachten die Gerade parallel zur x-Achse durch den Punkt $(0,\frac{1}{2})$. Anhand der Skizze sehen wir, dass diese keinen Schnittpunkt mit dem Graphen von h besitzt. Also ist $h^{-1}(\{\frac{1}{2}\}) = \emptyset$ und h ist nicht surjektiv.

(d) *Injektivität.* Für jede natürliche Zahl gibt es mehr als eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}$, die diese Kardinalität besitzt. Zum Beispiel gilt $|\{1\}| = |\{2\}| = 1$ und daher ist $|\kappa^{-1}(\{1\})| > 1$. Also ist κ nicht injektiv.

Surjektivität Wir zeigen, dass κ surjektiv ist. Dazu betrachten wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge $M_n := \{1, 2, ..., n\}$. Außerdem setzen wir $M_0 := \emptyset$. Für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ ist M_n ein endliches Element der Potenzmenge von $\mathbb{N}$. Daher können wir M_n unter κ abbilden und es gilt $\kappa(M_n) = |M_n| = n$. Also ist κ surjektiv, da $|\kappa^{-1}(\{n\})| \geq 1$ für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

Hausaufgabe 6 Gegeben ist die folgende Abbildung.

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{4x}{x^2 - 4}$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen der Abbildung f.

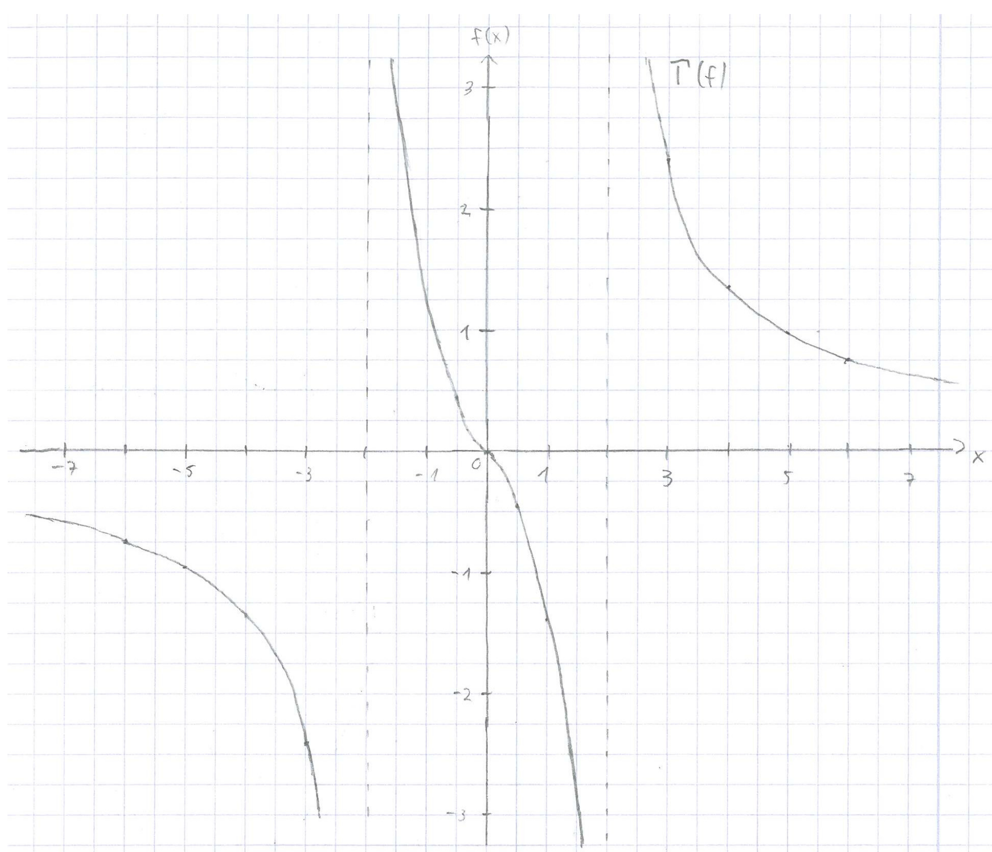
(b) Entscheiden Sie anhand der Skizze, ob $f|_{\mathbb{R}_{>2}}^{\mathbb{R}_{>0}}$ bijektiv ist.

Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $\left(f|_{\mathbb{R}_{>2}}^{\mathbb{R}_{>0}}\right)^{-1}$.

(c) Bestimmen Sie $f^{-1}(\{0, 1\})$.

Lösung.

(a) Skizze des Graphen von f. Dabei können wir benutzen, dass f punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs ist. Für $x \to \pm\infty$ nähert sich der Graph von f asymptotisch der x-Achse an.



(b) Für $a \in \mathbb{R}_{>0}$ betrachten wir die Gerade parallel zur x-Achse durch den Punkt $(0, a)$. Anhand der Skizze sehen wir, dass jede solche Gerade genau einen Schnittpunkt $x \in \mathbb{R}_{>2}$

mit dem Graphen von $f|_{\mathbb{R}_{>2}}^{\mathbb{R}_{>0}}$ besitzt. Also ist $f|_{\mathbb{R}_{>2}}^{\mathbb{R}_{>0}}$ sowohl injektiv, als auch surjektiv und damit bijektiv.

Wir bestimmen die Umkehrfunktion von $f|_{\mathbb{R}_{>2}}^{\mathbb{R}_{>0}}$. Dazu setzen wir $y = \frac{4x}{x^2-4}$ und lösen die Gleichung nach x auf. Nach Voraussetzung ist dabei $x \in \mathbb{R}_{>2}$ und $y \in \mathbb{R}_{>0}$.

$$\begin{aligned} y = \frac{4x}{x^2-4} &\Leftrightarrow y(x^2-4) = 4x \\ &\Leftrightarrow yx^2 - 4y = 4x \\ &\Leftrightarrow yx^2 - 4x - 4y = 0 \end{aligned}$$

Daraus folgen die zwei Fälle

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+16y^2}}{2y} = \frac{2}{y} \pm \frac{2\sqrt{1+y^2}}{y}\,.$$

Aus der Voraussetzung $y > 0$ erhalten wir die folgenden Abschätzungen.

$$\frac{2}{y} > 0\,, \qquad \frac{2\sqrt{1+y^2}}{y} > 2\,, \qquad \frac{2}{y} < \frac{2\sqrt{1+y^2}}{y}$$

Wegen der Bedingung $x > 2$ können wir daher die Differenz der beiden Terme ausschließen. Als Umkehrfunktion erhalten wir damit

$$\left(f|_{\mathbb{R}_{>2}}^{\mathbb{R}_{>0}}\right)^{-1} : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>2} : y \mapsto \frac{2+2\sqrt{1+y^2}}{y}.$$

(c) Wir bestimmen zuerst das Urbild von $\{0\}$ unter f. Dazu lösen wir folgende Gleichung.

$$\begin{aligned} \frac{4x}{x^2-4} = 0 &\Leftrightarrow 4x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Also ist $f^{-1}(\{0\}) = 0$.

Auf gleichem Weg bestimmen wir das Urbild von $\{1\}$ unter f.

$$\begin{aligned} \frac{4x}{x^2-4} = 1 &\Leftrightarrow 4x = x^2 - 4 \\ &\Leftrightarrow 0 = x^2 - 4x - 4 \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+16}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{2}$$

und wir erhalten $f^{-1}(\{1\}) = \{2-2\sqrt{2},\, 2+2\sqrt{2}\}$.

Zusammensetzen ergibt das Urbild von $\{0,1\}$ unter f.

$$f^{-1}(\{0,1\}) = \{2-2\sqrt{2},\, 0,\, 2+2\sqrt{2}\}$$

Hausaufgabe 7 Gegeben ist die Relation $(\sim)$ auf einer Menge M. Untersuchen Sie $(\sim)$ auf Reflexivität, Symmetrie, Identitivität und Transitivität.

(a) $M := \mathbb{N}^2$ und $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) :\Leftrightarrow (x_1 < y_1) \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 \le y_2)$ für $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{N}$.

(b) Sei M die Menge der Abbildungen von $\{1,2,3\}$ nach $\{1,2,3\}$.
Sei $f \sim g :\Leftrightarrow f \circ g = f$ für $f, g \in M$.

Lösung.

(a) *Reflexivität.* Sei $(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2$. Es ist $(x_1, x_2) \sim (x_1, x_2)$, da $x_1 = x_1$ und $x_2 \leq x_2$. Also ist $(\sim)$ reflexiv.

Symmetrie. Es ist $(1, 1) \sim (2, 2)$, aber nicht $(2, 2) \sim (1, 1)$. Also ist $(\sim)$ nicht symmetrisch.

Identitivität. Seien $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{N}^2$ mit $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ und $(y_1, y_2) \sim (x_1, x_2)$. Das bedeutet $x_1 = y_1$, da sonst $x_1 < y_1$ und $x_1 > y_1$ gelten müsste. Damit ist $x_2 \leq y_2$ und $y_2 \leq x_2$ und daher $x_2 = y_2$.

Zusammen erhalten wir $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ und $(\sim)$ ist identitiv.

Transitivität. Seien $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in \mathbb{N}^2$ mit $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ und $(y_1, y_2) \sim (z_1, z_2)$. Aus der Definition von $(\sim)$ folgt $x_1 \leq y_1 \leq z_1$. Falls $x_1 < z_1$ ist, gilt sofort $(x_1, x_2) \sim (z_1, z_2)$. Wir betrachten den Fall $x_1 = z_1$. In dieser Situation ist $x_1 = y_1 = z_1$ und damit $x_2 \leq y_2 \leq z_2$.

Zusammen erhalten wir $(x_1, x_2) \sim (z_1, z_2)$ und $(\sim)$ ist transitiv.

(b) *Reflexivität.* Sei $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ gegeben durch $f(1) = 2$, $f(2) = 3$ und $f(3) = 1$. Dann ist $f \circ f \neq f$, denn $(f \circ f)(1) = f(2) = 3 \neq f(1)$.

Also ist $(\sim)$ nicht reflexiv.

Symmetrie. Sei $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\} : n \mapsto 1$ die konstante Abbildung mit Bild $\{1\}$ und $g = \mathrm{id}_{\{1,2,3\}}$. Dann ist $f \circ g = f \circ \mathrm{id}_{\{1,2,3\}} = f$, aber $g \circ f = \mathrm{id}_{\{1,2,3\}} \circ f = f \neq g$.

Also ist $(\sim)$ nicht symmetrisch.

Identitivität. Sei $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\} : n \mapsto 1$ die konstante Abbildung mit Bild $\{1\}$ und $g : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\} : n \mapsto 2$ die konstante Abbildung mit Bild $\{2\}$. Dann gilt $(f \circ g)(n) = f(2) = 1 = f(n)$ und $(g \circ f)(n) = g(1) = 2 = g(n)$ für $n \in \{1, 2, 3\}$.

Also ist $f \sim g$ und $g \sim f$, aber $f \neq g$ und daher ist $\sim$ nicht identitiv.

Transitivität. Seien f, g, h Abbildungen von $\{1, 2, 3\}$ nach $\{1, 2, 3\}$ mit $f \circ g = f$ und $g \circ h = g$. Es gilt $f \circ h = (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) = f \circ g = f$.

Also ist $\sim$ transitiv.

Hausaufgabe 8

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass $a \sim b :\Leftrightarrow f(a) = f(b)$ für $a, b \in \mathbb{R}$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ definiert. Bestimmen Sie für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)^2$ die Äquivalenzklassen $[\pi]$ und $[\frac{\pi}{2}]$.

(b) Sei auf $M := \mathrm{Pot}(\{1, 2, 3\}) \backslash \{\emptyset\}$ die Relation $X \approx Y :\Leftrightarrow X \cap Y = \emptyset$ für $X, Y \in M$ gegeben. Sei $(\sim)$ die von $(\approx)$ erzeugte Äquivalenzrelation auf M. Geben Sie die Äquivalenzklassen von $(\sim)$ an.

Lösung.

(a) Wir zeigen zuerst, dass $(\sim)$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ definiert.

Reflexivität. Es ist $(\sim)$ reflexiv, da $f(a) = f(a)$ für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt.

Symmetrie. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \sim b$. Dann gilt $f(b) = f(a)$ und damit $b \sim a$.

Transitivität. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \sim b$ und $b \sim c$. Dann gilt $f(a) = f(b) = f(c)$ und daher $a \sim c$.

Wir betrachten jetzt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)^2$. Für $a \in \mathbb{R}$ ist $[a]$ die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ mit $\sin(x)^2 = \sin(a)^2$. Damit gilt

$$\begin{aligned} [\pi] &= \big\{x \in \mathbb{R} : \sin(x)^2 = \sin(\pi)^2\big\} = \big\{x \in \mathbb{R} : \sin(x)^2 = 0\big\} = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \\ \left[\frac{\pi}{2}\right] &= \left\{x \in \mathbb{R} : \sin(x)^2 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right\} = \big\{x \in \mathbb{R} : \sin(x)^2 = 1\big\} = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}. \end{aligned}$$

(b) Als ersten Schritt wollen wir die von $(\approx)$ erzeugte Äquivalenzrelation beschreiben. Dazu stellen wir zuerst die Relation $(\approx)$ in einer Tafel dar.

$(\approx)$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$\{1\}$		$\times$	$\times$			$\times$	
$\{2\}$	$\times$		$\times$		$\times$		
$\{3\}$	$\times$	$\times$		$\times$			
$\{1,2\}$			$\times$				
$\{1,3\}$		$\times$					
$\{2,3\}$	$\times$						
$\{1,2,3\}$							

Nach Definition von $(\approx)$ können wir direkt feststellen, dass $(\approx)$ bereits eine symmetrische Relation ist. Daher können wir aus $(\approx)$ nun eine reflexive und symmetrische Relation S durch Hinzunehmen aller Paare (X, X) mit $X \in M$ bilden. Dann ist $S \subseteq (\sim)$.

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$\{1\}$	$\times$	$\times$	$\times$			$\times$	
$\{2\}$	$\times$	$\times$	$\times$		$\times$		
$\{3\}$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$			
$\{1,2\}$			$\times$	$\times$			
$\{1,3\}$		$\times$			$\times$		
$\{2,3\}$	$\times$					$\times$	
$\{1,2,3\}$							$\times$

Seien $a, b, c \in \{1, 2, 3\}$ paarweise verschieden. Wir nutzen aus, dass $(\sim)$ transitiv ist.

Wegen $\{a, b\} S \{c\} S \{a\} S \{b, c\}$ und $S \subseteq (\sim)$ ist auch $\{a, b\} \sim \{a\}$ und $\{a, b\} \sim \{b, c\}$.

Wir erhalten eine transitive Relation $(\hat{\sim})$ durch Hinzunehmen aller Paare $(\{a, b\}, \{a\})$, $(\{a\}, \{a, b\})$ und $(\{a, b\}, \{b, c\})$ zu S. Wieder gilt $(\hat{\sim}) \subseteq (\sim)$.

$(\hat{\sim})$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$\{1\}$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	
$\{2\}$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	
$\{3\}$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	
$\{1,2\}$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	
$\{1,3\}$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	
$\{2,3\}$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	
$\{1,2,3\}$							$\times$

Nun ist aber $(\hat{\sim})$ bereits eine Äquivalenzrelation mit den Äquivalenzklassen

$$\begin{aligned} [\{1\}] &= \{\{1\},\, \{2\},\, \{3\},\, \{1,2\},\, \{1,3\},\, \{2,3\}\} \\ [\{1,2,3\}] &= \{\{1,2,3\}\}. \end{aligned}$$

Da $(\hat{\sim})$ eine Äquivalenzrelation ist, die $(\approx)$ enthält, erhalten wir $(\sim) \subseteq (\hat{\sim})$. Zusammen mit $(\hat{\sim}) \subseteq (\sim)$ von oben ist also $(\sim) = (\hat{\sim})$ und die gesuchten Äquivalenzklassen sind die von $(\hat{\sim})$.