Künzer, Nitsche, Ritter

Mathematik 1 für inf, swt, msv

Lösung 13

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 49 Seien $s, t \in \mathbb{C}$ Parameter. Sei $A_{s,t} := \begin{pmatrix} 3\mathrm{i}s+t & -s-\mathrm{i}t & \sqrt{2}(\mathrm{i}s-t) \\ s+\mathrm{i}t & 3\mathrm{i}s+t & -\sqrt{2}(s+\mathrm{i}t) \\ \sqrt{2}(\mathrm{i}s-t) & \sqrt{2}(s+\mathrm{i}t) & 2(\mathrm{i}s+t) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$.

(1) Für welche $(s,t) \in \mathbb{C}^2$ ist $A_{s,t}$ hermitesch?

(2) Für welche $(s,t) \in \mathbb{C}^2$ ist $A_{s,t}$ unitär?

Lösung. Wir berechnen zunächst $\overline{A}_{s,t}^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} -3\mathrm{i}\bar{s}+\bar{t} & \bar{s}-\mathrm{i}\bar{t} & \sqrt{2}(-\mathrm{i}\bar{s}-\bar{t}) \\ -\bar{s}+\mathrm{i}\bar{t} & -3\mathrm{i}\bar{s}+\bar{t} & \sqrt{2}(\bar{s}-\mathrm{i}\bar{t}) \\ \sqrt{2}(-\mathrm{i}\bar{s}-\bar{t}) & -\sqrt{2}(\bar{s}-\mathrm{i}\bar{t}) & 2(-\mathrm{i}\bar{s}+\bar{t}) \end{pmatrix}$.

(1) Sei $M_1 := \{(s,t) \in \mathbb{C}^2 : A_{s,t} \text{ ist hermitesch}\}$.

Per Definition ist $A_{s,t}$ genau dann hermitesch, wenn $A_{s,t} \stackrel{!}{=} \overline{A}_{s,t}^{\mathrm{t}}$ ist.

Sei $A_{s,t}$ hermitsch.

Der erste Diagonaleintrag ergibt die Gleichung

$$3\mathrm{i}s + t \stackrel{!}{=} -3\mathrm{i}\bar{s} + \bar{t}.$$

Der dritte Diagonaleintrag ergibt die Gleichung

$$2(\mathrm{i}s + t) \stackrel{!}{=} 2(-\mathrm{i}\bar{s} + \bar{t}).$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt $s = -\bar{s}$ und $t = \bar{t}$, also $\mathrm{Re}(s) = 0$ und $\mathrm{Im}(t) = 0$.

Es ist also $M_1 \subseteq \tilde{M}_1 := \{(s,t) \in \mathbb{C}^2 : \mathrm{Re}(s) = 0 \text{ und } \mathrm{Im}(t) = 0\}$.

Umgekehrt ist $A_{s,t}$ für $(s,t) \in \tilde{M}_1$ hermitesch.

Insgesamt ist also $M_1 = \tilde{M}_1 = \{(s,t) \in \mathbb{C}^2 : \mathrm{Re}(s) = 0 \text{ und } \mathrm{Im}(t) = 0\}$.

(2) Sei $M_2 := \{(s,t) \in \mathbb{C}^2 : A_{s,t} \text{ ist unitär}\}$.

Sei $B := (b_{i,j})_{i,j} := \overline{A}_{s,t}^{\mathrm{t}} \cdot A_{s,t}$.

Per Definition ist $A_{s,t}$ genau dann unitär, wenn $B \stackrel{!}{=} \mathrm{E}_4$ ist.

Sei $A_{s,t}$ unitär.

Dann gilt

$$\begin{array}{rcl} 0 \stackrel{!}{=} b_{1,2} & = & (-3\mathrm{i}\bar{s} + \bar{t})(-s - \mathrm{i}t) + (\bar{s} - \mathrm{i}\bar{t})(3\mathrm{i}s + t) + 2(-\mathrm{i}\bar{s} - \bar{t})(s + \mathrm{i}t) \\ & = & 4\mathrm{i}(s\bar{s} - t\bar{t}). \end{array}$$

Es gilt also $s\bar{s} = t\bar{t}$.

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} 1 \overset{!}{=} b_{1,1} &= (-3\mathrm{i}\bar{s}+\bar{t})(3\mathrm{i}s+t)+(\bar{s}-\mathrm{i}\bar{t})(s+\mathrm{i}t)+2(-\mathrm{i}\bar{s}-\bar{t})(\mathrm{i}s-t) \\ &= 12s\bar{s}+4t\bar{t} \\ &= 16s\bar{s}. \end{aligned}$$

Es gilt also $s\bar{s} = \frac{1}{16} = t\bar{t}$ und äquivalent dazu $|s| = \frac{1}{4} = |t|$.

Es ist also $M_2 \subseteq \tilde{M}_2 := \{(s,t) \in \mathbb{C}^2 : |s| = \frac{1}{4} = |t|\}$.

Umgekehrt erhalten wir für $(s,t) \in \tilde{M}_2$ die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 12\bar{s}s+4\bar{t}t & 4\mathrm{i}\,(\bar{s}s-\bar{t}t) & 4\sqrt{2}(\bar{s}s-\bar{t}t) \\ -4\mathrm{i}\,(\bar{s}s-\bar{t}t) & 12\bar{s}s+4\bar{t}t & 4\mathrm{i}\sqrt{2}(\bar{s}s-\bar{t}t) \\ 4\sqrt{2}(\bar{s}s-\bar{t}t) & -4\mathrm{i}\sqrt{2}(\bar{s}s-\bar{t}t) & 8\bar{s}s+8\bar{t}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix} = \mathrm{E}_3 \,.$$

Also ist $A_{s,t}$ für $(s,t) \in \tilde{M}_2$ unitär.

Ingesamt ist also $M_2 = \tilde{M}_2 = \{(s,t) \in \mathbb{C}^2 : |s| = \frac{1}{4} = |t|\}$.

Hausaufgabe 50

(1) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von ${}_{\mathbb{R}}\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{R}^{4\times 1}$.

(2) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von ${}_{\mathbb{C}}\langle \begin{pmatrix}1\\\mathrm{i}\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\mathrm{i}\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\\mathrm{i}\\1\\\mathrm{i}\end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{C}^{4\times 1}$.

Lösung.

(1) Sei $V := {}_{\mathbb{R}}\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{R}^{4\times 1}$. Sei $c_1 := \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $c_2 := \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $c_3 := \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Es wird $d_1' = c_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Es wird $d_1 = \frac{1}{||d_1'||} d_1' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Es wird $d_2' = c_2 - (d_1^{\mathrm{t}} \cdot c_2)d_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} - (\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}) \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

Es wird $d_2 = \frac{1}{||d_2'||} d_2' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

Es wird

$$\begin{aligned} d_3' &= c_3 - (d_1^{\mathrm{t}} \cdot c_3)d_1 - (d_2^{\mathrm{t}} \cdot c_3)d_2 \\ &= \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} - (\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}) \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - (\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}) \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - 0 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es wird $d_3 = \frac{1}{||d_3'||} d_3' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Wir erhalten die Orthonormalbasis $(d_1, d_2, d_3) = (\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$ von V.

(2) Sei $W := {}_{\mathbb{C}}\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{C}^{4\times 1}$. Sei $c_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$, $c_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Es wird $d_1' = c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$.

Es wird $d_1 = \frac{1}{||d_1'||} d_1' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$.

Es wird $d_2' = c_2 - (\bar{d}_1^{\mathrm{t}} \cdot c_2) d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - (\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \\ 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ -1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}$.

Es wird $d_2 = \frac{1}{||d_2'||} d_2' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ -1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}$.

Es wird

$$\begin{aligned} d_3' &= c_3 - (\bar{d}_1^{\mathrm{t}} \cdot c_3) d_1 - (\bar{d}_2^{\mathrm{t}} \cdot c_3) d_2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix} - (\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \\ 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}) \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} - (\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \\ -1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}) \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ -1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix} - 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} + \frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ -1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es wird $d_3 = \frac{1}{||d_3'||} d_3' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wir erhalten die Orthonormalbasis $(d_1, d_2, d_3) = (\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ -1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix})$ von W.

Hausaufgabe 51 Sei $A := \begin{pmatrix} 1&1&1&1 \\ 1&1&1&1 \\ 1&1&1&1 \\ 1&1&1&1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.
Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $T \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit

$$T^{\mathrm{t}} A T \;=\; D\,.$$

Lösung. Zunächst berechnen wir das charakteristische Polynom von A.

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) &= \det(A - X \cdot \mathrm{E}_4) \\
&= \det \begin{pmatrix} 1-X & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-X & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-X & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-X \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} -X & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -X & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -X & 1 \\ X & X & X & 1-X \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} -X & 0 & 0 & 1 \\ X & -X & 0 & 1 \\ 0 & X & -X & 1 \\ 0 & 0 & X & 1-X \end{pmatrix} \\
&= X^3 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-X \end{pmatrix} \\
&= X^3 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4-X \end{pmatrix} \\
&= X^3 \cdot (-1)^3 \cdot (4 - X) \\
&= (X - 4)X^3
\end{aligned}$$

Also hat A die Eigenwerte $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = 0$.
Es wird $\mathrm{aV}_A(4) = \mathrm{gV}_A(4) = 1$. Es wird $\mathrm{aV}_A(0) = \mathrm{gV}_A(0) = 3$.
Wir berechnen eine Basis des Eigenraums $\mathrm{E}_A(4) = \mathrm{Kern}(A - 4 \cdot \mathrm{E}_4)$.

$$A - 4 \cdot \mathrm{E}_4 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es ist also $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis von $\mathrm{E}_A(4)$.

Gram-Schmidt gibt dann die Orthonormalbasis $\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ von $\mathrm{E}_A(4)$.
Wir berechnen eine Basis des Eigenraums $\mathrm{E}_A(0) = \mathrm{Kern}(A - 0 \cdot \mathrm{E}_4) = \mathrm{Kern}(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es ist also $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis von $\mathrm{E}_A(0)$.
Wir berechnen mittels Gram-Schmidt eine Orthonormalbasis von $\mathrm{E}_A(0)$.
Es wird $d_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Es wird $d_2' = c_2 - (d_1^{\mathrm{t}} \cdot c_2) d_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Also wird $d_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Es wird

$$
\begin{aligned}
d_3' &= c_3 - (d_1^{\mathrm{t}} \cdot c_3) d_1 - (d_2^{\mathrm{t}} \cdot c_3) d_2 \\
&= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

Also wird $d_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Wir erhalten die Orthonormalbasis $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ von $\mathrm{E}_A(0)$.

Zusammen wird mit der Orthogonalmatrix

$$
T := \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{6} & -\sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{6} & -\sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{3} & 0 & 2\sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}
$$

und der Diagonalmatrix

$$
D := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

dann $T^{\mathrm{t}} T = \mathrm{E}_4$ und $T^{-1} A T = T^{\mathrm{t}} A T = D$.

Hausaufgabe 52 Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & 1 \\ -\mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} \\ 1 & -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$.

(1) Bestimmen Sie eine unitäre Matrix $U \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mit

$$
\bar{U}^{\mathrm{t}} A U \;=\; D \,.
$$

(2) Bestimmen Sie eine unitäre Matrix $V \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ und eine Diagonalmatrix $F \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mit

$$
\bar{V}^{\mathrm{t}} A^3 V \;=\; F \,.
$$

Lösung.

(1) Zunächst berechnen wir das charakteristische Polynom von A.

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) &= \det(A - X \cdot \mathrm{E}_3) \\
&= \det \begin{pmatrix} 1-X & \mathrm{i} & 1 \\ -\mathrm{i} & 1-X & \mathrm{i} \\ 1 & -\mathrm{i} & 1-X \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 2-X & 0 & 2-X \\ -\mathrm{i} & 1-X & \mathrm{i} \\ 1 & -\mathrm{i} & 1-X \end{pmatrix} \\
&= (2-X) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\mathrm{i} & 1-X & \mathrm{i} \\ 1 & -\mathrm{i} & 1-X \end{pmatrix} \\
&= (2-X) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-X & 2\mathrm{i} \\ 0 & -\mathrm{i} & -X \end{pmatrix} \\
&= (2-X) \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1-X & 2\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & -X \end{pmatrix} \\
&= (2-X) \cdot (-X(1-X) - 2) \\
&= (2-X)(X^2 - X - 2) \\
&= -(X+1)(X-2)^2
\end{aligned}$$

Also hat A die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 2$.

Es wird $\mathrm{aV}_A(1) = \mathrm{gV}_A(1) = 1$. Es wird $\mathrm{aV}_A(2) = \mathrm{gV}_A(2) = 2$.

Wir berechnen eine Basis des Eigenraums $\mathrm{E}_A(-1) = \mathrm{Kern}(A - (-1) \cdot \mathrm{E}_3) = \mathrm{Kern}(A + \mathrm{E}_3)$.

$$A + \mathrm{E}_3 = \begin{pmatrix} 2 & \mathrm{i} & 1 \\ -\mathrm{i} & 2 & \mathrm{i} \\ 1 & -\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} & 2 \\ 0 & 3\mathrm{i} & -3 \\ 0 & 3 & 3\mathrm{i} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} & 2 \\ 0 & 1 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es ist also $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis von $\mathrm{E}_A(-1)$.

Gram-Schmidt gibt dann die Orthonormalbasis $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ von $\mathrm{E}_A(-1)$.

Wir berechnen eine Basis des Eigenraums $\mathrm{E}_A(2) = \mathrm{Kern}(A - 2 \cdot \mathrm{E}_3)$.

$$A - 2 \cdot \mathrm{E}_3 = \begin{pmatrix} -1 & \mathrm{i} & 1 \\ -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es ist also $\left(\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis von $\mathrm{E}_A(2)$.

Wir berechnen mittels Gram-Schmidt eine Orthonormalbasis von $\mathrm{E}_A(2)$.

Es wird $d_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Es wird $d_2' = c_2 - (\bar{d}_1^{\mathrm{t}} \cdot c_2) d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\mathrm{i}}{2} \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 2 \end{pmatrix}$.

Also wird $d_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 2 \end{pmatrix}$.

Wir erhalten die Orthonormalbasis $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ von von $\mathrm{E}_A(2)$.

Zusammen wird mit der unitären Matrix

$$U := \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \mathrm{i}\sqrt{3} & 1 \\ -\mathrm{i}\sqrt{2} & \sqrt{3} & \mathrm{i} \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und der Diagonalmatrix

$$D := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

wird dann $\bar{U}^{\mathrm{t}} \cdot U = \mathrm{E}_3$ und $U^{-1} A U = \bar{U}^{\mathrm{t}} A U = D$.

(2) Mit den Bezeichnungen aus (1) gilt

$$D^3 = (\bar{U}^{\mathrm{t}} A U)^3 = \bar{U}^{\mathrm{t}} A U \cdot \bar{U}^{\mathrm{t}} A U \cdot \bar{U}^{\mathrm{t}} A U = \bar{U}^{\mathrm{t}} A^3 U.$$

Mit der unitären Matrix

$$V := U$$

und der Diagonalmatrix

$$F := D^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

wird also $\bar{V}^{\mathrm{t}} A^3 V = F$.