Homologische Algebra

Matthias Künzer

Universität Bremen

22. April 2024

Inhalt

1 Ringe und Moduln **7**
1.1 Ringe . . . 7
1.1.1 Definition Ringe . . . 7
1.1.2 Ideale, Teilringe und Faktorringe . . . 8
1.1.3 Ringmorphismen . . . 10
1.2 Moduln . . . 12
1.2.1 Definition Linksmoduln . . . 12
1.2.2 Teilmoduln und Faktormoduln . . . 13
1.2.3 R-lineare Abbildungen . . . 14
1.2.4 Direkte Summen und Matrizen . . . 17
1.2.5 Produkt und Coprodukt . . . 19
1.2.6 Ein paar universelle Eigenschaften . . . 19
1.2.7 R/I-Linksmoduln . . . 22
1.2.8 Rechts- und Bimoduln . . . 22
1.2.8.1 Definition Rechtsmoduln . . . 22
1.2.8.2 Definition Bimoduln . . . 23
1.2.9 Exakte Sequenzen . . . 24
1.2.10 Hom und Tensorprodukt . . . 25
1.2.10.1 Hom . . . 25
1.2.10.2 Tensorprodukt . . . 29
1.2.10.3 Zusammenhang Hom und Tensorprodukt . . . 36
1.2.11 Projektiv und injektiv . . . 37
1.2.11.1 Projektive Moduln . . . 37
1.2.11.2 Injektive Moduln . . . 38

2 Kategorien, Funktoren und Transformationen **42**
2.1 Kategorien . . . 42
2.1.1 Definition Kategorien . . . 42
2.1.2 Die entgegengesetzte Kategorie . . . 44
2.1.3 Eigenschaften von Morphismen . . . 45
2.1.4 Eigenschaften von Objekten . . . 46
2.2 Funktoren . . . 48
2.3 Transformationen . . . 51
2.4 Äquivalenz von Kategorien . . . 53

3 Additive Kategorien und additive Funktoren **55**
3.1 Additive Kategorien . . . 55
3.2 Additive Funktoren . . . 59
3.3 Faktorkategorien . . . 61

4 Abelsche Kategorien **65**
4.1 Kerne und Cokerne . . . 65
4.2 Begriff der abelschen Kategorie . . . 67
4.3 Homomorphiesatz . . . 68
4.4 Exakte Sequenzen . . . 70
4.5 Diagrammlemmata . . . 72

4.5.1 Umfangssequenzlemma . . . 72
4.5.2 Pullbacks und Pushouts . . . 74
4.5.3 Schlangenlemma . . . 78
4.6 Projektiv und injektiv . . . 79

5 Komplexe **81**
5.1 Indizes oben und unten . . . 81
5.2 Homotopiekategorie . . . 81
5.3 Induzierte Funktoren auf Homotopiekategorien . . . 82
5.4 Homologiefunktor . . . 83
5.4.1 Auf Komplexen . . . 83
5.4.2 Auf Morphismen von Komplexen . . . 84
5.4.3 Auf der Homotopiekategorie . . . 86
5.4.4 Die lang exakte Homologiesequenz . . . 86
5.5 Auflösungsäquivalenz . . . 88
5.6 Hufeisenlemma . . . 93

6 Abgeleitete Funktoren **96**
6.1 Abgeleitete Funktoren in einer Variablen . . . 96
6.1.1 Definition . . . 96
6.1.2 Eigenschaften . . . 98
6.1.2.1 Der nullte Rechtsabgeleitete . . . 99
6.1.2.2 Die lang exakte Sequenz . . . 100
6.2 Abgeleitete Funktoren in zwei Variablen . . . 104
6.2.1 Doppelkomplexe . . . 104
6.2.2 Totalkomplex . . . 105
6.2.3 Biadditive Funktoren . . . 106
6.2.4 Ableiten biadditiver Funktoren . . . 107
6.3 Zusammenhang Ableiten in zwei und je einer Variablen . . . 109
6.3.1 Quasiisomorphismen . . . 109
6.3.2 Zeilenweise Quasiisomorphismen . . . 110
6.3.3 Drei Interpretationen . . . 111

7 Ergänzungen **116**
7.1 Yoneda-ext . . . 116
7.1.1 Der Shiftfunktor . . . 116
7.1.2 Quasiisomorphismen induzieren Isomorphismen . . . 116
7.1.3 Ext als Hom . . . 119
7.1.4 Produkte auf Ext . . . 121
7.1.5 Ext und Erweiterungen: das Yoneda-ext . . . 123
7.2 Lokalisierung an einer dicken Teilkategorie . . . 136
7.2.1 Dicke Teilkategorien $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{A}$ . . . 136
7.2.2 Eigenschaften von $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismen . . . 138
7.2.3 Die Quotientenkategorie $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$ . . . 140
7.3 Freydkategorie . . . 155
7.3.1 Begriff der schwach abelschen Kategorie . . . 155
7.3.2 Konstruktion der Freydkategorie . . . 159
7.3.3 Freydkategorie abelsch . . . 160
7.3.4 Einbettung von $\mathcal{K}$ in $\hat{\mathcal{K}}$ . . . 163
7.3.5 Exakte Sequenzen . . . 164
7.3.6 Universelle Eigenschaft der Freydkategorie . . . 166

A Aufgaben **173**

Verzeichnis der Sätze und einiger Lemmata

Lemma 60	§1.2.10.2	S. 34	Rechtsexaktheit Tensorprodukt
Satz 68	§1.2.11.2	S. 40	R-Mod hat genügend Injektive
Lemma 96	§2.4	S. 53	Voll-treu-dicht-Kriterium für Äquivalenz
Lemma 132	§4.5.1	S. 72	Umfangssequenzlemma
Lemma 134	§4.5.2	S. 75	Kern-Cokern-Kriterium für Pullbacks und Pushouts
Lemma 136	§4.5.3	S. 78	Schlangenlemma
Lemma 145	§5.4.4	S. 87	Lang exakte Homologiesequenz
Lemma 149	§5.5	S. 89	Auflösungsäquivalenz
Lemma 153	§5.6	S. 94	Hufeisenlemma
Satz 166	§6.1.2.2	S. 102	Lang exakte Sequenz der Abgeleiteten
Satz 180	§6.3.3	S. 113	Ableiten in zwei und in je einer Variablen
Satz 196	§7.1.5	S. 124	Korrespondenz Ext zu Yoneda-ext
Lemma 223	§7.2.3	S. 148	Quotientenkategorie abelsch
Satz 233	§7.3.3	S. 160	Freydkategorie abelsch
Lemma 242	§7.3.6	S. 167	Universelle Eigenschaft der Freydkategorie

Vorwort

Die Homologische Algebra ist ein Werkzeug für die Algebraische Topologie, für die Gruppentheorie, für die Kommutative Algebra etc.

Technisch gesprochen ist die Homologische Algebra die Lehre der abelschen Kategorien und der additiven Funktoren zwischen diesen. Zunächst wird also der Begriff der abelschen Kategorie einzuführen sein. Es bilden e.g. die abelschen Gruppen eine solche abelsche Kategorie – und daher entlehnt sich auch der Name.

Die meisten der in der Natur auftretenden additiven Funktoren zwischen solchen abelschen Kategorien haben Defekte; sie sind teils nur linksexakt, wie etwa Homfunktoren; teils nur rechtsexakt, wie etwa Tensorfunktoren. Diese Defekte versucht man aufzufangen, indem man die gegebenen Funktoren ableitet und die gegebenen und die abgeleiteten Funktoren über eine lang exakte Sequenz verbindet.

Auf Übungen und Lösungen wird im Skript manchmal Bezug genommen, sie sind daher als Bestandteil des Skripts anzusehen.

Vorausgesetzt wird Lineare Algebra, insbesondere die Begriffe der abelschen Gruppe, des Körpers und des Vektorraums. Zorns Lemma wird an einer Stelle verwandt, bei der Konstruktion von Injektiven; für einen Beweis wird e.g. auf den Anhang von [**7**] verwiesen.

Für Korrekturen und Vereinfachungen danke ich Sebastian Thomas ([1]).

Bremen, den 07.04.2010

Matthias Künzer

Für zahlreiche Korrekturen danke ich Andreas Bächle. Für Korrekturen danke ich Daniela-Maria Cococeanu, Liviu-Lucian Ionesi, Markus Jedlitschky, Simon Paridon, Mathias Ritter, Nico Stein und Alexander Thumm. Für Aufgabe 65 danke ich Carsten Dietzel.

Für weitere Hinweise auf Fehler und Unklarheiten bin ich dankbar.

Stuttgart, den 20.07.2010 (und später)

Matthias Künzer

[1] Student der Universität Bremen, nicht identisch mit Sebastian Thomas von der RWTH Aachen.

Konventionen.

- Sind x und y Elemente einer Menge, so setzen wir $\partial_{x,y} := 1$, falls $x = y$, und $\partial_{x,y} := 0$, falls $x \neq y$.
- Sprechen wir davon, daß x und y zwei Elemente einer Menge sind, so kann dennoch $x = y$ oder $x \neq y$ sein. Etc.
- Die identische Abbildung auf einer Menge X wird id_X, 1_X, oder, falls keine Verwechslungsgefahr besteht, id oder 1 geschrieben.
- Ist R ein Ring und $k \geqslant 0$, so bezeichnet $\mathrm{E}_k := (\partial_{i,j})_{i,j} \in R^{k \times k}$ die Einheitsmatrix.
- Wir schreiben $X \sqcup Y$ für die disjunkte Vereinigung von Mengen X und Y.
- Wir schreiben $|X|$ für die Kardinalität einer Menge X.
- Wir schreiben $\mathrm{Pot}(X) = \{Y \ : \ Y \subseteq X\}$ für die Potenzmenge einer Menge X.
- Ist $X \xrightarrow{f} Y$ eine Abbildung von Mengen, und ist $x \in X$, so schreiben wir das Bild von x unter f als xf. Ihr Bild wird $Xf := \{xf \ : \ x \in X\}$ geschrieben.
- Sind $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ Morphismen in einer Kategorie, so schreiben wir ihr Kompositum $X \xrightarrow{fg} Z$ oder $X \xrightarrow{f \cdot g} Z$ ([2]).
- Ist $X \xrightarrow{f} Y$ eine Abbildung von Mengen, und sind $X' \subseteq X$ und $Y' \subseteq Y$ derart, daß $X'f \subseteq Y'$, dann schreiben wir $f|_{X'}^{Y'} : X' \longrightarrow Y'$, $x' \longmapsto x'f$ für die im Urbild- und Bildbereich eingeschränkte Abbildung. Falls $Y' = Y$, dann schreiben wir auch $f|_{X'} := f|_{X'}^{Y}$. Falls $X' = X$, dann schreiben wir auch $f|^{Y'} = f|_{X}^{Y'}$.
- Es *kommutiert* ein Viereck

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x"'] & X' \arrow[d, "x'"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Y' \end{tikzcd}$$

  in einer Kategorie, falls $fx' = xg$. Allgemeiner *kommutiert* ein Diagramm in einer Kategorie, wenn der zusammengesetzte Morphismus von einem seiner Objekte in ein anderes vom gewählten Weg unabhängig ist.
- Ist $a \in \mathbf{Z}$, so schreiben wir $\mathbf{Z}_{\geqslant a} := \{z \in \mathbf{Z} \ : \ z \geqslant a\}$, etc.
- Sind $a, b \in \mathbf{Z}$, so schreiben wir $[a, b] := \{z \in \mathbf{Z} \ : \ a \leqslant z \leqslant b\}$ für das ganzzahlige Intervall.
- Ist R ein kommutativer Ring, und sind $a, b, c \in R$, so schreiben wir $a \equiv_c b$, gesprochen "a kongruent modulo c zu b", falls es ein $x \in R$ mit $a - b = cx$ gibt.
- Ist R ein kommutativer Ring und $a \in R$, so schreiben wir oft $R/a := R/aR$. Cf. Bemerkung 6.(2).
- Mit $\hookrightarrow$ wird manchmal eine Inklusionsabbildung resp. ein Inklusionsfunktor bezeichnet.
- Ist A eine Aussage in Kategorien, so bezeichnet A° die zu A duale Aussage; cf. Bemerkung 77.
- Für $n \geqslant 0$ haben wir die Kategorie $\Delta_n := \{0, 1, \ldots, n\}^{\mathrm{k}}$; cf. Aufgabe 37.(1). I.e. $\mathrm{Ob}\,\Delta_n := \{0, 1, \ldots, n\}$, und $|\,_{\Delta_n}(i, j)| = 1$, falls $i \leqslant j$, sowie $|\,_{\Delta_n}(i, j)| = 0$, falls $i > j$.

[2]Diese natürliche Schreibweise erleichtert das Lesen größerer Diagramme. Funktoren werden wir hingegen in traditioneller Schreibweise links notieren, cf. §2.2.

Kapitel 1

Ringe und Moduln

Die Kategorie der Moduln über einem Ring wird unser Standardbeispiel einer abelschen Kategorie darstellen; cf. Beispiel 121.(1) unten. Hierbei ist der Begriff des Moduls über einem Ring die direkte Verallgemeinerung des Begriffs des Vektorraums über einem Körper.

1.1 Ringe

Ein paar grundlegende Dinge über Ringe. Eine ausführlichere Darstellung findet sich in [**6,** Kap. 1].

1.1.1 Definition Ringe

Definition 1 Ein *Ring* ist ein Tripel $(R, +, \cdot)$ aus einer Menge R und aus Abbildungen $R \times R \xrightarrow{(+)} R$, $(r, s) \longmapsto r + s$ (*Addition*) und $R \times R \xrightarrow{(\cdot)} R$, $(r, s) \longmapsto r \cdot s$ (*Multiplikation*) derart, daß folgende Axiome gelten.

(Ring 1) Es ist $(R, +)$ eine abelsche Gruppe.

(Ring 2) Es ist $(\cdot)$ assoziativ, i.e. es ist $r \cdot (s \cdot t) = (r \cdot s) \cdot t$ für $r,\ s,\ t \in R$.

(Ring 3) Es gibt ein Element $1 = 1_R \in R$ mit $r \cdot 1_R = r = 1_R \cdot r$ für $r \in R$.

(Ring 4) Es ist $(+, \cdot)$ distributiv, i.e. es ist $(r+r') \cdot s = (r \cdot s) + (r' \cdot s)$ und $r \cdot (s+s') = r \cdot s + r \cdot s'$ für $r,\ r',\ s,\ s' \in R$.

Oft schreiben wir kurz $R = (R, +, \cdot)$. Oft schreiben wir $rs := r \cdot s$ für $r,\ s \in R$.

Es gelte die Punkt-vor-Strich-Regel, nach der e.g. $r \cdot s + t = (r \cdot s) + t$ zu lesen ist, wobei $r,\ s,\ t \in R$.

Wir schreiben $0 = 0_R \in R$ für das bzgl. $(+)$ neutrale Element, i.e. $r + 0 = r = 0 + r$ für $r \in R$.

Ist $r \cdot s = s \cdot r$ für $r,\, s \in R$, so heißt der Ring R *kommutativ.*

Bemerkung 2

(1) *Das Element* $1 \in R$ *ist durch* (Ring 3) *eindeutig festgelegt.*

(2) *Es ist* $0 \cdot r = 0 = 0 \cdot r$ *für* $r \in R$.

(3) *Es ist* $(-r) \cdot s = -(r \cdot s) = r \cdot (-s)$ *für* $r,\, s \in R$.

Beweis.

(1) Ist $1' \in R$ mit $r \cdot 1' = r = 1' \cdot r$ für $r \in R$, so folgt $1' = 1' \cdot 1 = 1$.

(2) Es ist $0 \cdot r = 0 \cdot r + 0 \cdot r - 0 \cdot r = (0+0) \cdot r - 0 \cdot r = 0 \cdot r - 0 \cdot r = 0$. Analog $r \cdot 0 = 0$.

(3) Siehe Aufgabe 1.

□

Beispiel 3

(1) Es ist $\mathbf{Z}$ ein kommutativer Ring.

(2) Ein Körper ist ein kommutativer Ring, in welchem $0 \neq 1$ ist und jedes Element ungleich 0 ein multiplikativ Inverses besitzt. Insbesondere sind die Körper $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ und $\mathbf{C}$ auch kommutative Ringe.

(3) Es gibt einen Ring $0 = \{0\}$, in welchem $0 = 1$ ist, genannt der *Nullring.*

(4) Sei R ein Ring. Sei $n \geqslant 1$. Es bildet die Menge $R^{n \times n}$ der $n \times n$-Matrizen mit Einträgen in R, der Matrixaddition $(+)$ und der Matrixmultiplikation $(\cdot)$ einen Ring. Dieser ist für $n \geqslant 2$ nicht kommutativ, falls $0 \neq 1$ in R. Cf. Aufgabe 2.

(5) Seien R und S Ringe. Dann ist $R \times S = \{(r,s) \,:\, r \in R,\, s \in S\}$, ausgestattet mit $(r,s) + (r',s') = (r+r', s+s')$ und $(r,s) \cdot (r',s') = (r \cdot r', s \cdot s')$ für $r,\, r' \in R$ und $s,\, s' \in S$, ein Ring. Hierbei ist $1_{R \times S} = (1_R\,, 1_S)$ und $0_{R \times S} = (0_R\,, 0_S)$. Ferner ist $-(r,s) = (-r, -s)$.

1.1.2 Ideale, Teilringe und Faktorringe

Sei R ein Ring.

Definition 4

(1) Eine additive Untergruppe S von R heißt *Teilring (mit Eins),* falls $1 \in S$, und falls $ss' \in S$ für alle $s,\, s' \in S$.

(2) Eine additive Untergruppe I von R heißt *Ideal,* falls $rx \in I$ und $xr \in I$ für alle $x \in I$ und alle $r \in R$.

Beispiel 5

(1) Ist R ein kommutativer Ring und $a \in R$, so ist $aR := \{ar \ : \ r \in R\}$ ein Ideal in R, das zu a gehörige *Hauptideal.*

(2) Es sind $0 := \{0\}$ und R Ideale in R.

(3) Sei I ein Ideal in R. Es ist $I = R$ genau dann, wenn $1 \in I$.

(4) Sei R ein Ring. Es sind $\{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) \ : \ a \in R\}$, $\{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \ : \ a, d \in R\}$ und $\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \ : \ a, b, d \in R\}$ Teilringe von $R^{2\times 2}$.

Bemerkung 6

(1) *Ist $S \subseteq R$ ein Teilring, so ist S mit den vererbten Operationen, also genauer gesagt $\big(S, (+)|^S_{S\times S}, (\cdot)|^S_{S\times S}\big)$, wieder ein Ring.*

(2) *Sei $I \subseteq R$ ein Ideal. Schreibe $r + I := \{r + x \ : \ x \in I\} \subseteq R$ für die* Restklasse *von $r \in R$ modulo I. Beachte, daß $r + I = r' + I$ genau dann, wenn $r - r' \in I$. Sei*

$$R/I \ := \ \{r + I \ : \ r \in R\}$$

der Faktorring *von R modulo I. Es ist R/I mit der Addition $(r + I) + (r' + I) := (r + r') + I$ und der Multiplikation $(r + I) \cdot (r' + I) = (r \cdot r') + I$ ein Ring. Hierbei sind $0_{R/I} = 0_R + I$ und $1_{R/I} = 1_R + I$.*

Ist R kommutativ und $a \in R$, so schreiben wir oft $R/a := R/aR$.

Beweis. Zu (2), siehe Aufgabe 3. □

Beispiel 7 Jedes Ideal in $\mathbf{Z}$ ist von der Form $n\mathbf{Z}$ für ein eindeutig bestimmtes $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$.

Sei $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$. Es ist $\mathbf{Z}/n = \{0 + n\mathbf{Z}, 1 + n\mathbf{Z}, \ldots, (n-1) + n\mathbf{Z}\}$, aber auch e.g. $\mathbf{Z}/n = \{-2 + n\mathbf{Z}, \ldots, (n-3) + n\mathbf{Z}\}$.

Ist aus dem Kontext ersichtlich, daß wir in $\mathbf{Z}/n$ rechnen, so schreiben wir auch $k := k + n\mathbf{Z}$, repräsentiert von $k \in \mathbf{Z}$. Man muß dann aufpassen, daß mit $k = k'$ in Wahrheit $k \equiv_n k'$ gemeint ist, wobei $k, k' \in \mathbf{Z}$. Aber ansonsten würden die Notation recht schwerfällig aussehen; insbesondere, wenn man an Matrizen mit Einträgen in $\mathbf{Z}/n$ denkt.

Wir können e.g. in $\mathbf{Z}/27$ berechnen, daß $25 \cdot 26 = 650 = 648 + 2 = 2$, oder, einfacher, $25 \cdot 26 = (-2) \cdot (-1) = 2$.

Es ist $\mathbf{Z}/n$ ein Körper genau dann, wenn n eine Primzahl ist. Siehe Aufgabe 4.

Beispiel 8 Seien R und S Ringe. Es ist $R \times 0 := \{(r, 0) \ : \ r \in R\}$ ein Ideal in $R \times S$. In $(R \times S)/(R \times 0)$ ist e.g. $(r, s) + R \times 0 = (r', s) + R \times 0$ für $r, r' \in R$ und $s \in S$.

1.1.3 Ringmorphismen

Seien R, S und T Ringe.

Definition 9 Eine Abbildung $R \xrightarrow{f} S$ heißt *Ringmorphismus,* falls $1_R f = 1_S$, falls $(r + r')f = rf + r'f$ und falls $(r \cdot r')f = rf \cdot r'f$ für $r, r' \in R$.

Diesenfalls setzen wir folgendes.

Sei $\operatorname{Kern} f := \{r \in R \ : \ rf = 0\} \subseteq R$ der *Kern* von f.

Sei $\operatorname{Im} f := Rf = \{rf \ : \ r \in R\} \subseteq S$ das *Bild* von f.

Bemerkung 10 *Seien* $R \xrightarrow{f} S \xrightarrow{g} T$ *Ringmorphismen.*

(1) *Es ist* id_R *ein Ringmorphismus. Es ist das Kompositum* $R \xrightarrow{fg} T$ *ein Ringmorphismus.*

(2) *Ist* $I \subseteq R$ *ein Ideal, so ist die Restklassenabbildung* $R \xrightarrow{\rho} R/I$, $r \longmapsto r + I$ *ein Ringmorphismus.*

(3) *Ist* $\tilde{R} \subseteq R$ *ein Teilring, so ist die Inklusionsabbildung* $\tilde{R} \overset{\iota}{\hookrightarrow} R$ *ein Ringmorphismus.*

(4) *Es ist* $0_R f = 0_S$. *Es ist* $(-r)f = -(rf)$ *für* $r \in R$.

(5) *Es ist* $\operatorname{Kern} f \subseteq R$ *ein Ideal. Es ist* $\operatorname{Im} f \subseteq S$ *ein Teilring.*

(6) *Es ist* f *injektiv genau dann, wenn* $\operatorname{Kern} f = 0$.

Beweis.

Zu (4). Es ist $0f = 0f + 0f - 0f = (0 + 0)f - 0f = 0$. Es ist $(-r)f = (-r)f + rf - rf = ((-r) + r)f - rf = 0f - rf = -(rf)$.

Zu (5).

Wir zeigen, daß $\operatorname{Kern} f \subseteq R$ ein Ideal ist. Es ist $\operatorname{Kern} f$ eine additive Untergruppe. Seien ferner $x \in \operatorname{Kern} f$ und $r \in R$. Dann ist $(rx)f = rf \cdot xf = 0$, und also $rx \in \operatorname{Kern} f$. Analog ist auch $xr \in \operatorname{Kern} f$.

Wir zeigen, daß $\operatorname{Im} f \subseteq S$ ein Teilring ist. Es ist $\operatorname{Im} f$ eine additive Untergruppe. Es ist $1_S = 1_R f \in \operatorname{Im} f$. Sind $s, s' \in \operatorname{Im} f$, so gibt es $r, r' \in R$ mit $rf = s$ und $r'f = s'$, und also ist $ss' = rf \cdot r'f = (rr')f \in \operatorname{Im} f$.

Zu (6).

Ist f injektiv, so ist $\operatorname{Kern} f = 0$, da bereits $0_R f = 0_S$.

Ist umgekehrt $\operatorname{Kern} f = 0$, und ist $rf = r'f$ für $r, r' \in R$, dann ist $(r - r')f = 0$, und folglich $r - r' = 0$, i.e. $r = r'$. $\square$

Definition 11 Ein bijektiver Ringmorphismus heißt *Ringisomorphismus* oder *Isomorphismus (von Ringen)*, symbolisch oft $R \xrightarrow{\sim} S$ geschrieben.

Existiert ein Isomorphismus von R nach S, so sagen wir, R ist *isomorph* zu S, geschrieben $R \simeq S$. Cf. Aufgabe 8.(1).

Beispiel 12

(1) Es ist $(R \times S)/(R \times 0) \xrightarrow{\sim} S$, $(r, s) + R \times 0 \longmapsto s$ ein Isomorphismus; cf. Beispiel 8.

(2) Schreibe $\kappa : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$, $a + b\,\mathrm{i} \longmapsto a - b\,\mathrm{i}$, wobei a, $b \in \mathbf{R}$, für die komplexe Konjugation. Es ist κ ein Ringisomorphismus.

Bemerkung 13 (Universelle Eigenschaft Faktorring) *Sei $I \subseteq R$ ein Ideal. Sei $R \xrightarrow{f} S$ ein Ringmorphismus mit $If = 0$. Dann gibt es genau einen Ringmorphismus $R/I \xrightarrow{\bar{f}} S$ so, daß $(R \xrightarrow{\rho} R/I \xrightarrow{\bar{f}} S) = (R \xrightarrow{f} S)$. Insbesondere ist $(r + I)\bar{f} = rf$ für $r \in R$.*

$$\begin{tikzcd} r \arrow[d, mapsto] & R \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho"'] & S \\ r + I & R/I \arrow[ur, dotted, "\exists!\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Beweis. Die Eindeutigkeit von $\bar{f}$ folgt aus der Surjektivität von $R \xrightarrow{\rho} R/I$. Zeigen wir die Existenz. Setzen wir $R/I \xrightarrow{\bar{f}} S$, $r + I \longmapsto rf$, so ist dies eine wohldefinierte Abbildung, da für r, $r' \in R$ mit $r + I = r' + I$ folgt, daß $r - r' \in I$, und also, daß $rf - r'f = (r - r')f = 0$. Da f ein Ringmorphismus ist, gilt dies nun auch für $\bar{f}$. □

Lemma 14 (Homomorphiesatz für Ringe) *Sei $R \xrightarrow{f} S$ ein Ringmorphismus. Dann gibt es den Isomorphismus $R/\mathrm{Kern}\, f \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}\, f$, $r + \mathrm{Kern}\, f \longmapsto rf$.*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho"'] & S \\ R/\mathrm{Kern}\, f \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Im}\, f \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

Beweis. Nach Bemerkung 13 gibt es den Ringmorphismus $R/\mathrm{Kern}\, f \xrightarrow{\bar{f}} S$, $r + \mathrm{Kern}\, f \longmapsto rf$. Nach Konstruktion schränkt dieser im Bildbereich ein zum surjektiven Ringmorphismus $R/\mathrm{Kern}\, f \xrightarrow{\bar{f}|^{\mathrm{Im}\, f}} \mathrm{Im}\, f$, $r + \mathrm{Kern}\, f \longmapsto rf$. Um zu zeigen, daß dieser auch injektiv ist, genügt es zu zeigen, daß sein Kern null ist; cf. Bemerkung 10.(6). Falls aber $rf = 0$ ist, so folgt $r \in \mathrm{Kern}\, f$, und also $r + \mathrm{Kern}\, f = 0$. □

Beispiel 15

(1) Für jeden Ring R gibt es genau einen Ringmorphismus von R nach 0.

(2) Für jeden Ring R gibt es genau einen Ringmorphismus von $\mathbf{Z}$ nach R. Dieser schickt $\pm(1_{\mathbf{Z}} + 1_{\mathbf{Z}} + \cdots + 1_{\mathbf{Z}})$ nach $\pm(1_R + 1_R + \cdots + 1_R)$. Sein Kern ist von der Form $n\mathbf{Z}$ für ein $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$; cf. Aufgabe 4.(1). Dieses n heißt *Charakteristik* von R, geschrieben $\operatorname{char} R := n$. Gemäß Lemma 14 hat R also einen Teilring isomorph zu $\mathbf{Z}/\operatorname{char} R$.

1.2 Moduln

1.2.1 Definition Linksmoduln

Sei R ein Ring.

Definition 16 Ein *R-Linksmodul* ist ein Tripel $(M, +, \cdot)$ aus einer Menge M, einer Abbildung $M \times M \xrightarrow{(+)} M$, $(m, m') \longmapsto m + m'$ (*Addition*) und einer Abbildung $R \times M \xrightarrow{(\cdot)} M$, $(r, m) \longmapsto r \cdot m$ (*Skalarmultiplikation*) derart, daß folgende Axiome gelten.

(LMod 1) Es ist $(M, +)$ eine abelsche Gruppe.

(LMod 2) Es ist $(\cdot)$ assoziativ, i.e. es ist $r \cdot (s \cdot m) = (r \cdot s) \cdot m$ für $r, s \in R$ und $m \in M$.

(LMod 3) Es ist $1 \cdot m = m$ für $m \in M$.

(LMod 4) Es ist $(+, \cdot)$ distributiv, i.e. es ist $(r + r') \cdot m = (r \cdot m) + (r' \cdot m)$ und $r \cdot (m + m') = (r \cdot m) + (r \cdot m')$ für $r, r' \in R$ und $m, m' \in M$.

Oft schreiben wir kurz $M = {}_R M = (M, +, \cdot)$. Oft schreiben wir $rm := r \cdot m$ für $r \in R$ und $m \in M$.

Es gelte die Punkt-vor-Strich-Regel, nach der e.g. $r \cdot m + m' = (r \cdot m) + m'$ zu lesen ist, wobei $r \in R$ und $m, m' \in M$.

Wir schreiben $0 = 0_M \in M$ für das bzgl. $(+)$ neutrale Element, i.e. $m + 0 = m = 0 + m$ für $m \in M$.

Ist R kommutativ, so nennt man einen R-Linksmodul auch kurz einen *R-Modul*; cf. Bemerkung 44.

Bemerkung 17 Sei M ein R-Linksmodul. Für $r \in R$ und $m \in M$ ist $0 \cdot m = 0 \cdot m + 0 \cdot m - 0 \cdot m = 0$ und $(-r) \cdot m = (-r) \cdot m + r \cdot m - r \cdot m = -r \cdot m$, ferner $r \cdot 0 = 0$ und $r \cdot (-m) = -r \cdot m$.

Beispiel 18

(1) Ist R ein Körper, so ist ein R-Modul gerade ein R-Vektorraum.

(2) Eine abelsche Gruppe M trägt eine eindeutige $\mathbf{Z}$-Modul-Struktur. Denn notwendigerweise ist $(\pm(1_{\mathbf{Z}} + \cdots + 1_{\mathbf{Z}}))m = \pm(m + \cdots + m)$. Dies definiert umgekehrt auch eine $\mathbf{Z}$-Modul-Struktur. Man sagt auch, eine abelsche Gruppe *ist* ein $\mathbf{Z}$-Modul.

Es sind e.g. (die unterliegenden abelschen Gruppen von) $\mathbf{Z}/12$ und $\mathbf{Q}$ beides $\mathbf{Z}$-Moduln.

(3) Es ist R selbst vermöge der auf R definierten Multiplikation ein R-Linksmodul, oft ${}_RR$ geschrieben.

(4) Es ist $0 := \{0\}$ ein R-Linksmodul.

(5) Sei $R = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \\ 0 & \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right) := \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{Q}^{2\times 2} \ : \ a,\, b,\, d \in \mathbf{Q}\}$; cf. Beispiel 5.(4).

Es ist $\mathbf{Q}^{2\times 1} = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right)$ ein $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \\ 0 & \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right)$-Linksmodul vermöge $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} am+bn \\ dn \end{smallmatrix}\right)$, wobei $a,\, b,\, d,\, m,\, n \in \mathbf{Q}$. Dies folgt aus den Gesetzen der Matrixmultiplikation, angewandt auf die hier auftretenden Matrizen.

Genauso ist auch $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ ein $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \\ 0 & \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right)$-Linksmodul.

1.2.2 Teilmoduln und Faktormoduln

Sei R ein Ring. Sei M ein R-Linksmodul.

Definition 19 Eine Teilmenge $N \subseteq M$ heißt *Teilmodul* oder (seltener) *Teil-R-Linksmodul*, falls $0 \in N$ und $rn + r'n' \in N$ für $r,\, r' \in R$ und $n,\, n' \in N$.

In anderen Worten, $N \subseteq M$ ist Teilmodul, falls N eine additive Untergruppe von M ist, die unter Multiplikation mit R abgeschlossen ist.

Beispiel 20

(1) Ist $m \in M$, so ist $Rm := \{rm \ : \ r \in R\} \subseteq M$ ein Teilmodul.

(2) Es sind $0 := \{0\}$ und M Teilmoduln von M.

(3) Ist R ein Körper, so ist ein Teilmodul gerade ein Teilraum.

(4) Sei $R = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \\ 0 & \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right)$. Es ist $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \subseteq \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right)$ ein Teilmodul.

Bemerkung 21

(1) *Ist $N \subseteq M$ ein Teilmodul, so ist N mit den vererbten Operationen, also genauer gesagt $(N, (+)|^N_{N\times N}, (\cdot)|^N_{R\times N})$, wieder ein R-Linksmodul.*

(2) *Sei $N \subseteq M$ ein Teilmodul. Schreibe $m + N := \{m + n \ : n \in N\}$ für die* Restklasse *von $m \in M$ modulo N. Beachte, daß $m + N = m' + N$ genau dann, wenn $m - m' \in N$. Sei*

$$M/N \ := \ \{m + N \ : \ m \in M\}$$

der Faktormodul *von M modulo N. Mit der Addition $(m + N) + (m' + N) := (m + m') + N$ und der Skalarmultiplikation $r \cdot (m + N) := (r \cdot m) + N$ wird M/N ein R-Linksmodul.*

Beweis. Zu (2), siehe Aufgabe 7.

Beispiel 22

(1) Sei $R = \mathbf{Z}$. Ein Teilmodul ist dann dasselbe wie eine additive Untergruppe.

(2) Sei $R = \mathbf{Z}$. Sei $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$. Es ist $n\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Z}$ ein Teilmodul. Es ist $\mathbf{Z}/n = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ der Faktormodul.

(3) Sei $R = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \\ 0 & \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right)$. Wir können den Faktormodul $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right) / \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ bilden. Darin ist dann e.g. $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Wir können darin e.g. $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \left(\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ rechnen, oder aber $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \left(\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \left(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Definition 23 Sei $X \subseteq M$ eine Teilmenge. Sei

$$_R\langle X \rangle \ := \ \left\{ \sum_{x \in X} r_x x \ : \ r_x \in R, \ \{x \in X : r_x \neq 0\} \text{ endlich} \right\}$$

das *Erzeugnis* von X. Ist $X = \{x_i : i \in I\}$ für eine Indexmenge I und $x_i \in M$, so schreiben wir auch $_R\langle X \rangle = \ _R\langle \{x_i : i \in I\} \rangle =: \ _R\langle x_i : i \in I \rangle$, etc.

Es ist $_R\langle X \rangle$ ein Teilmodul von M, der X enthält.

Umgekehrt enthält jeder Teilmodul von M, der X enthält, auch $_R\langle X \rangle$.

Es ist e.g. $Rm = \ _R\langle m \rangle$ für $m \in M$; cf. Beispiel 20.(1).

1.2.3 R-lineare Abbildungen

Sei R ein Ring. Seien M, N und P drei R-Linksmoduln.

Definition 24 Eine Abbildung $M \xrightarrow{f} N$ heiße *R-linear* oder *Morphismus von R-Linksmoduln,* falls $(rm + r'm')f = r(mf) + r'(m'f)$ für $r, r' \in R$ und $m, m' \in M$.

Diesenfalls setzen wir folgendes.

Sei $\operatorname{Kern} f := \{m \in M \ : \ mf = 0\} \subseteq M$ der *Kern* von f.

Sei $\operatorname{Im} f := Mf = \{mf \ : \ m \in M\} \subseteq N$ das *Bild* von f.

Sei $\operatorname{Cokern} f := N/\operatorname{Im} f$ der *Cokern* von f; cf. Bemerkung 25.(5) unten.

Bemerkung 25

(1) Es ist $\mathrm{id}_M = 1_M = 1 : M \longrightarrow M$, $m \longmapsto m$ eine R-lineare Abbildung.

Ferner ist $0_{M,N} = 0 : M \longrightarrow N$, $m \longmapsto 0$ eine R-lineare Abbildung.

(2) Sind $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ beide R-linear, so auch $M \xrightarrow{fg} P$.

(3) Sei $M' \subseteq M$ ein Teilmodul.

Dann sind die Inklusionabbildung $M' \xrightarrow{\iota = \iota_{M'}} M$, $m' \longmapsto m'$ und die Restklassenabbildung $M \xrightarrow{\rho = \rho_{M/M'}} M/M'$, $m \longmapsto m + M'$ beides R-lineare Abbildungen.

(4) Sei $M \xrightarrow{f} N$ eine R-lineare Abbildung.

Es ist $0f = 0$. Es ist $(-m)f = -(mf)$ für $m \in M$.

(5) Sei $M \xrightarrow{f} N$ eine R-lineare Abbildung.

Es ist $\operatorname{Kern} f \subseteq M$ ein Teilmodul. Es ist $\operatorname{Im} f \subseteq N$ ein Teilmodul.

(6) Es ist f injektiv genau dann, wenn $\operatorname{Kern} f = 0$.

Es ist f surjektiv genau dann, wenn $\operatorname{Cokern} f = 0$.

(7) Sind $M \underset{f'}{\overset{f}{\rightrightarrows}} N$ beide R-linear, dann auch $M \xrightarrow{f+f'} N$, $m \longmapsto m(f+f') := mf + mf'$ und $M \xrightarrow{-f} N$, $m \longmapsto m(-f) := -mf$. Es ist $f + (-f) = 0$. Sind $M \underset{f'}{\overset{f}{\rightrightarrows}} N \underset{g'}{\overset{g}{\rightrightarrows}} P$ alle R-linear, so ist $(f+f')(g+g') = fg + fg' + f'g + f'g'$.

Beispiel 26

(1) Ist R ein Körper, so erhalten wir in Definition 24 den Begriff der R-linearen Abbildung zwischen Vektorräumen aus der Linearen Algebra.

(2) Ist $R = \mathbf{Z}$, so reduziert sich die definierende Bedingung in Definition 24 auf $(m+m')f = mf + m'f$ für $m, m' \in M$. Eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung ist also dasselbe wie ein Morphismus abelscher Gruppen.

(3) Sei $R = \mathbf{Z}$. Seien $m, n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$. Sei $a \in \mathbf{Z}$ so, daß $am \equiv_n 0$.

Es ist $\mathbf{Z}/m \longrightarrow \mathbf{Z}/n$, $z + m\mathbf{Z} \longmapsto az + n\mathbf{Z}$ ein Morphismus abelscher Gruppen, i.e. eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung, geschrieben $\mathbf{Z}/m \xrightarrow{a} \mathbf{Z}/n$.

Wir haben e.g. die $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung $\mathbf{Z}/8 \xrightarrow{12} \mathbf{Z}/16$. Diese hat den Kern $\{0 + 8\mathbf{Z},\ 4 + 8\mathbf{Z}\}$ und das Bild $\{0 + 16\mathbf{Z},\ 4 + 16\mathbf{Z},\ 8 + 16\mathbf{Z},\ 12 + 16\mathbf{Z}\}$.

In diesem Zusammenhang sei $\mathbf{Z}/0$ mit $\mathbf{Z}$ identifiziert.

Definition 27 Eine bijektive R-lineare Abbildung $M \longrightarrow N$ heißt auch *Isomorphismus (von R-Linksmoduln)*, symbolisch $M \xrightarrow{\sim} N$ geschrieben.

Existiert ein Isomorphismus von M nach N, so sagen wir, M ist *isomorph* zu N, geschrieben $M \simeq N$. Cf. Aufgabe 8.(2).

Beispiel 28 Sei $R = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \\ 0 & \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right)$. Es gibt keinen Isomorphismus von $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ nach $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right) / \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Denn sei $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \xrightarrow{f} \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right) / \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ eine R-lineare Abbildung. Schreibe $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) f =: \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Es wird

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) f \;=\; \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right) f \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) f\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \;=\; 0\,.$$

Folglich ist f nicht injektiv.

Bemerkung 29 (Universelle Eigenschaft Faktormodul) *Sei $M' \subseteq M$ ein Teilmodul. Sei $M \xrightarrow{f} N$ eine R-lineare Abbildung mit $M'f = 0$.*

Dann gibt es genau eine R-lineare Abbildung $M/M' \xrightarrow{\bar{f}} N$ so, daß $(M \xrightarrow{\rho} M/M' \xrightarrow{\bar{f}} N) = (M \xrightarrow{f} N)$. Insbesondere ist $(m + M')\bar{f} = mf$ für $m \in M$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho"'] & N \\ M/M' \arrow[ur, dotted, "\exists!\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Beweis. Die Eindeutigkeit von $\bar{f}$ folgt aus der Surjektivität von $M \xrightarrow{\rho} M/M'$. Zeigen wir die Existenz. Setzen wir $M/M' \xrightarrow{\bar{f}} N$, $m + M' \longmapsto mf$, so ist dies eine wohldefinierte Abbildung, da für $m, \tilde{m} \in M$ mit $m + M' = \tilde{m} + M'$ folgt, daß $m - \tilde{m} \in M'$, und also, daß $mf - \tilde{m}f = (m - \tilde{m})f = 0$. Da f eine R-lineare Abbildung ist, gilt dies nun auch für $\bar{f}$. □

Lemma 30 (Homomorphiesatz für Moduln) *Sei $M \xrightarrow{f} N$ eine R-lineare Abbildung. Dann gibt es den Isomorphismus $\tilde{f} : M/\mathrm{Kern}\, f \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}\, f$, $m + \mathrm{Kern}\, f \longmapsto mf$.*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_{M/\mathrm{Kern}\, f}"'] & N \\ M/\mathrm{Kern}\, f \arrow[r, "\tilde{f}", "\sim"'] & \mathrm{Im}\, f \arrow[u, "\iota_{\mathrm{Im}\, f}"'] \end{tikzcd}$$

Insgesamt haben wir also

$$\begin{tikzcd} & & \mathrm{Cokern}\, \iota_{\mathrm{Kern}\, f} \arrow[dd, "\wr", "\tilde{f}"'] & & \\ \mathrm{Kern}\, f \arrow[r, "\iota_{\mathrm{Kern}\, f}"] & M \arrow[ur, "\rho"] \arrow[rr, "f"] & & N \arrow[r, "\rho_{\mathrm{Cokern}\, f}"] & \mathrm{Cokern}\, f \\ & & \mathrm{Kern}\, \rho_{\mathrm{Cokern}\, f} \arrow[ur, "\iota"'] & & \end{tikzcd}$$

mit $\rho\tilde{f}\iota = f$.

Beweis. Nach Bemerkung 29 gibt es die R-lineare Abbildung $M/\mathrm{Kern}\, f \xrightarrow{\bar{f}} N$, $m + \mathrm{Kern}\, f \longmapsto mf$. Wir schränken diese im Bildbereich ein zur surjektiven R-linearen Abbildung $\tilde{f} := \bar{f}|^{\mathrm{Im}\, f} : M/\mathrm{Kern}\, f \longrightarrow \mathrm{Im}\, f$, $m + \mathrm{Kern}\, f \longmapsto mf$. Um zu zeigen, daß diese auch injektiv ist, genügt es zu zeigen, daß ihr Kern null ist; cf. Bemerkung 25.(6). Falls aber $mf = 0$ ist, so folgt $m \in \mathrm{Kern}\, f$, und also $m + \mathrm{Kern}\, f = 0$. $\square$

1.2.4 Direkte Summen und Matrizen

Sei R ein Ring.

Seien α, β, $\gamma \geqslant 0$.

Gegeben seien R-Linksmoduln $M_1, \ldots, M_\alpha$; $N_1, \ldots, N_\beta$ und $P_1, \ldots, P_\gamma$.

Definition 31 Sei

$$\bigoplus\nolimits_{i\in[1,\alpha]} M_i \;=\; M_1 \oplus \cdots \oplus M_\alpha \;:=\; \{(m_1, \ldots, m_\alpha) \;:\; m_i \in M_i \text{ für } i \in [1,\alpha]\}$$

die *direkte Summe* von $(M_i)_{i\in I}$.

Via $(m_1, \ldots, m_\alpha) + (m'_1, \ldots, m'_\alpha) := (m_1 + m'_1, \ldots, m_\alpha + m'_\alpha)$ und $r(m_1, \ldots, m_\alpha) := (rm_1, \ldots, rm_\alpha)$ für $r \in R$, $m_i, m'_i \in M_i$, $i \in [1,\alpha]$, wird $\bigoplus_{i\in[1,\alpha]} M_i$ zu einem R-Linksmodul.

Wir schreiben auch $M^{\oplus n} := \bigoplus_{i\in[1,n]} M$ für $n \geqslant 0$ und einen R-Linksmodul M. Wir identifizieren $M^{\oplus 0} = 0$ und $M^{\oplus 1} = M$.

Definition 32 Gegeben seien R-lineare Abbildungen $f_{i,j} : M_i \longrightarrow N_j$ für $i \in [1,\alpha]$ und $j \in [1,\beta]$. Setze

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i\in[1,\alpha]} M_i & \xrightarrow{(f_{i,j})_{i,j} = \begin{pmatrix} f_{1,1} & \ldots & f_{1,\beta} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{\alpha,1} & \ldots & f_{\alpha,\beta} \end{pmatrix}} & \bigoplus_{j\in[1,\beta]} N_j \\ (m_1, \ldots, m_\alpha) & \longmapsto & (\sum_{i\in[1,\alpha]} m_i f_{i,1}, \ldots, \sum_{i\in[1,\alpha]} m_i f_{i,\beta}) \end{array}$$

Dies ist eine R-lineare Abbildung.

Ist $\beta = 1$, so schreiben wir auch $(f_{i,j})_{i,j} =: (f_i)_i$ (eine Spalte).

Ist $\alpha = 1$, so schreiben wir auch $(f_{i,j})_{i,j} =: (f_j)_j$ (eine Zeile).

Für $s \in [1,\alpha]$ schreiben wir $\iota_s := (\partial_{s,i})_i = (0 \ldots 0\, 1\, 0 \ldots 0) : M_s \longrightarrow \bigoplus_{i\in[1,\alpha]} M_i$, $m_s \longmapsto (0, \ldots, 0, m_s, 0, \ldots, 0)$.

Für $t \in [1,\beta]$ schreiben wir $\pi_t := (\partial_{t,j})_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} : \bigoplus_{j\in[1,\beta]} N_j \longrightarrow N_t$, $(n_1, \ldots, n_\beta) \longmapsto n_t$.

Bemerkung 33 *Jede R-lineare Abbildung von $\bigoplus_{i\in[1,\alpha]} M_i$ nach $\bigoplus_{j\in[1,\beta]} N_j$ ist von der Form $(f_{i,j})_{i,j}$ für gewisse R-lineare Abbildungen $f_{i,j} : M_i \longrightarrow N_j$ für $i \in [1,\alpha]$ und $j \in [1,\beta]$.*

Beweis. Sei g eine lineare Abbildung von $\bigoplus_{i\in[1,\alpha]} M_i$ nach $\bigoplus_{j\in[1,\beta]} N_j$. Setze $f_{i,j} := \iota_i g \pi_j : M_i \longrightarrow N_j$ für $i \in [1,\alpha]$ und $j \in [1,\beta]$. Sei $(m_1, \ldots, m_\alpha) \in \bigoplus_{i\in[1,\alpha]} M_i$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
(m_1, \ldots, m_\alpha)(f_{i,j})_{i,j} &= (\textstyle\sum_{i\in[1,\alpha]} m_i f_{i,1}, \ldots, \sum_{i\in[1,\alpha]} m_i f_{i,\beta}) \\
&= (\textstyle\sum_{i\in[1,\alpha]} m_i \iota_i g \pi_1, \ldots, \sum_{i\in[1,\alpha]} m_i \iota_i g \pi_\beta) \\
&= ((m_1, \ldots, m_\alpha) g\pi_1, \ldots, (m_1, \ldots, m_\alpha) g\pi_\beta) \\
&= (m_1, \ldots, m_\alpha) g ,
\end{aligned}$$

mithin $(f_{i,j})_{i,j} = g$. □

Bemerkung 34 (Matrixmultiplikation) *Seien R-lineare Abbildungen*

$$\bigoplus_{i\in[1,\alpha]} M_i \xrightarrow{(f_{i,j})_{i,j}} \bigoplus_{j\in[1,\beta]} N_j \xrightarrow{(g_{j,k})_{j,k}} \bigoplus_{k\in[1,\gamma]} P_k$$

gegeben. Ihr Kompositum ergibt sich zu

$$\bigoplus_{i\in[1,\alpha]} M_i \xrightarrow{(\sum_{j\in[1,\beta]} f_{i,j} g_{j,k})_{i,k}} \bigoplus_{k\in[1,\gamma]} P_k$$

Beweis. Sei $(m_1, \ldots, m_\alpha) \in \bigoplus_{i\in[1,\alpha]} M_i$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
& (m_1, \ldots, m_\alpha)(f_{i,j})_{i,j}(g_{j,k})_{j,k} \\
= \; & (\textstyle\sum_{i\in[1,\alpha]} m_i f_{i,1}, \ldots, \sum_{i\in[1,\alpha]} m_i f_{i,\beta})(g_{j,k})_{j,k} \\
= \; & (\textstyle\sum_{j\in[1,\beta]}\sum_{i\in[1,\alpha]} m_i f_{i,j} g_{j,1}, \ldots, \sum_{j\in[1,\beta]}\sum_{i\in[1,\alpha]} m_i f_{i,j} g_{j,\gamma}) \\
= \; & (\textstyle\sum_{i\in[1,\alpha]} m_i (\sum_{j\in[1,\beta]} f_{i,j} g_{j,1}), \ldots, \sum_{i\in[1,\alpha]} m_i (\sum_{j\in[1,\beta]} f_{i,j} g_{j,\gamma})) \\
= \; & (m_1, \ldots, m_\alpha)(\textstyle\sum_{j\in[1,\beta]} f_{i,j} g_{j,k})_{i,k} .
\end{aligned}$$

□

Beispiel 35 Sei $R = \mathbf{Z}$. Es wird

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}1&4\\1&6\end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/16 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}4&0\\2&-1\end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/8 \oplus \mathbf{Z}/4) \\
= \; & (\mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}12&-4\\16&-6\end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/8 \oplus \mathbf{Z}/4) \\
= \; & (\mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}4&0\\0&2\end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/8 \oplus \mathbf{Z}/4) .
\end{aligned}$$

1.2.5 Produkt und Coprodukt

Sei R ein Ring. Sei I eine (nicht notwendig endliche) Menge. Sei für jedes $i \in I$ ein R-Linksmodul M_i gegeben.

Definition 36

(1) Sei
$$\prod_{i\in I} M_i \;:=\; \{(m_i)_i \;:\; m_i \in M_i \text{ für } i \in I\}\;,$$
was, ausgestattet mit $(m_i)_i + (m'_i)_i \;:=\; (m_i + m'_i)_i$ und $r(m_i)_i \;:=\; (rm_i)_i$ für $(m_i)_i\,,\,(m'_i)_i \;\in\; \prod_{i\in I} M_i$ und $r \in R$, ein R-Linksmodul ist, genannt das *Produkt* von $(M_i)_i$.

Für $j \in I$ haben wir die R-lineare Abbildung $\pi_j : \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow M_j\,,\,(m_i)_i \longmapsto m_j$.

(2) Sei
$$\coprod_{i\in I} M_i \;:=\; \{(m_i)_i \;:\; m_i \in M_i \text{ für } i \in I, \text{ wobei } \{i \in I \;:\; m_i \neq 0\} \text{ endlich}\}\;,$$
was, ausgestattet mit $(m_i)_i + (m'_i)_i \;:=\; (m_i + m'_i)_i$ und $r(m_i)_i \;:=\; (rm_i)_i$ für $(m_i)_i\,,\,(m'_i)_i \;\in\; \coprod_{i\in I} M_i$ und $r \in R$, ein R-Linksmodul ist, genannt das *Coprodukt* von $(M_i)_i$.

Beachte hierbei, daß $\{i \in I \;:\; m_i + m'_i \neq 0\} \subseteq \{i \in I \;:\; m_i \neq 0\} \cup \{i \in I \;:\; m'_i \neq 0\}$.

Für $j \in I$ haben wir die R-lineare Abbildung $\iota_j : M_j \longrightarrow \coprod_{i\in I} M_i\,,\; m_j \longmapsto (x_i)_{i\in I}$ mit $x_j := m_j$ und $x_i := 0$ für $i \in I \smallsetminus \{j\}$.

Allgemein ist somit das Coprodukt ein Teilmodul des Produktes, $\coprod_{i\in I} M_i \subseteq \prod_{i\in I} M_i$.

Ist I hingegen endlich, so stimmen Produkt, Coprodukt und direkte Summe überein.

1.2.6 Ein paar universelle Eigenschaften

Sei R ein Ring.

Bemerkung 37 (Universelle Eigenschaften der direkten Summe)
Sei $\alpha \geqslant 0$. Seien R-Linksmoduln M_i gegeben für $i \in [1,\alpha]$.

(1) *Sei X ein R-Linksmodul. Seien R-lineare Abbildungen $X \xrightarrow{x_i} M_i$ gegeben für $i \in [1,\alpha]$. Dann gibt es genau eine R-lineare Abbildung $X \xrightarrow{x} \bigoplus_{i\in[1,\alpha]} M_i$ mit $x\pi_i = x_i$ für alle $i \in [1,\alpha]$.*

$$\begin{tikzcd}
 & & M_1 \\
X \arrow[urr, "x_1"] \arrow[r, dotted, "\exists! x"] \arrow[drr, "x_\alpha"'] & \bigoplus_{i\in[1,\alpha]} M_i \arrow[ur, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_\alpha"] & \vdots \\
 & & M_\alpha
\end{tikzcd}$$

(2) *Sei Y ein R-Linksmodul. Seien R-lineare Abbildungen $M_i \xrightarrow{y_i} Y$ gegeben für $i \in [1, \alpha]$. Dann gibt es genau eine R-lineare Abbildung $\bigoplus_{i\in[1,\alpha]} M_i \xrightarrow{y} Y$ mit $\iota_i y = y_i$ für alle $i \in [1, \alpha]$.*

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[dr, "\iota_1"] \arrow[drr, bend left, "y_1"] & & \\
\vdots & \bigoplus_{i\in[1,\alpha]} M_i \arrow[r, dotted, "\exists! y"] & Y \\
M_\alpha \arrow[ur, "\iota_\alpha"] \arrow[urr, bend right, "y_\alpha"'] & &
\end{tikzcd}$$

Beweis.

Zu (1). Wir können $x = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_\alpha \end{pmatrix}$ nehmen, was die Existenz zeigt. Die Eindeutigkeit folgt, da die Komposita mit den π_i alle Matrixeinträge von x festlegen; cf. Bemerkung 33.

Zu (2). Wir können $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_\alpha \end{pmatrix}$ nehmen, was die Existenz zeigt. Die Eindeutigkeit folgt, da die Komposita mit den ι_i alle Matrixeinträge von y festlegen; cf. Bemerkung 33. □

Bemerkung 38 (Universelle Eigenschaften von Produkt und Coprodukt)
Sei I eine Menge. Seien R-Linksmoduln M_i gegeben für $i \in I$.

(1) *Sei X ein R-Linksmodul. Seien R-lineare Abbildungen $X \xrightarrow{x_i} M_i$ gegeben für $i \in I$. Dann gibt es genau eine R-lineare Abbildung $X \xrightarrow{x} \prod_{i\in I} M_i$ mit $x\pi_i = x_i$ für alle $i \in I$.*

$$\begin{tikzcd}
 & & \vdots \\
 & & M_j \\
X \arrow[urr, bend left, "x_j"] \arrow[r, dotted, "\exists! x"] \arrow[drr, bend right, "x_{j'}"'] & \prod_{i\in I} M_i \arrow[ur, "\pi_j"] \arrow[dr, "\pi_{j'}"] & \vdots \\
 & & M_{j'} \\
 & & \vdots
\end{tikzcd}$$

(2) *Sei Y ein R-Linksmodul. Seien R-lineare Abbildungen $M_i \xrightarrow{y_i} Y$ gegeben für $i \in I$. Dann gibt es genau eine R-lineare Abbildung $\coprod_{i\in I} M_i \xrightarrow{y} Y$ mit $\iota_i y = y_i$ für alle $i \in I$.*

$$\begin{tikzcd}
\vdots & & \\
M_j \arrow[dr, "\iota_j"] \arrow[drr, "y_j"] & & \\
\vdots & \coprod_{i\in I} M_i \arrow[r, dotted, "\exists! y"] & Y \\
M_{j'} \arrow[ur, "\iota_{j'}"] \arrow[urr, "y_{j'}"'] & & \\
\vdots & &
\end{tikzcd}$$

Beweis.

Zu (1). Wir können und müssen $\xi x := (\xi x_i)_i$ setzen für $\xi \in X$.

Zu (2). Beachte, daß für $(m_i)_i \in \coprod_{i\in I} M_i$ stets $(m_i)_i = \sum_{i\in I} m_i\iota_i$ ist. Also müssen und können wir $(m_i)_i y = \sum_{i\in I} m_i\iota_i y := \sum_{i\in I} m_i y_i$ setzen. ▫

Bemerkung 39 (Universelle Eigenschaften von Kern und Cokern)
Sei $M \xrightarrow{f} N$ eine R-lineare Abbildung zwischen R-Linksmoduln.

(1) *Es ist $\iota_{\operatorname{Kern} f} f = 0$.*

Sei X ein R-Linksmodul. Sei $X \xrightarrow{x} M$ eine R-lineare Abbildung so, daß $xf = 0$. Dann gibt es genau eine R-lineare Abbildung $X \xrightarrow{x'} \operatorname{Kern} f$ mit $x'\iota_{\operatorname{Kern} f} = x$.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Kern} f \arrow[r, "\iota_{\operatorname{Kern} f}"] & M \arrow[r, "f"] & N \\
X \arrow[u, dotted, "\exists! x'"] \arrow[ur, "x"] \arrow[urr, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

(2) *Es ist $f\rho_{\operatorname{Cokern} f} = 0$.*

Sei Y ein R-Linksmodul. Sei $N \xrightarrow{y} Y$ eine R-lineare Abbildung so, daß $fy = 0$. Dann gibt es genau eine R-lineare Abbildung $\operatorname{Cokern} f \xrightarrow{y'} Y$ mit $\rho_{\operatorname{Cokern} f} y' = y$.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[drr, "0"'] & N \arrow[r, "\rho_{\operatorname{Cokern} f}"] \arrow[dr, "y"] & \operatorname{Cokern} f \arrow[d, dotted, "\exists! y'"] \\
& & Y
\end{tikzcd}$$

Beweis.

Zu (1). Da $xf = 0$, können wir $x' := x|^{\operatorname{Kern} f}$ wählen. Da $\iota_{\operatorname{Kern} f}$ injektiv ist, ist dies die einzige Möglichkeit.

Zu (2). Da $fy = 0$, ist $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Kern} y$. Da $\operatorname{Cokern} f = N/\operatorname{Im} f$, folgt die Behauptung aus der universellen Eigenschaft des Faktormoduls; cf. Bemerkung 29. ▫

1.2.7 R/I-Linksmoduln

Sei R ein Ring. Sei I ein Ideal in R.

Bemerkung 40

(1) *Sei M ein R-Linksmodul, für welchen*

$$IM \;:=\; \{\textstyle\sum_{i\in[1,k]} x_i m_i \;:\; k \geqslant 0,\; x_i \in I,\; m_i \in M\} \;=\; 0$$

ist. Dann wird $(M,+)$ mittels $(r+I)\cdot m := rm$ für $r \in R$ und $m \in M$ ein R/I-Linksmodul.

(2) *Sei N ein R/I-Linksmodul. Dann wird $(N,+)$ mittels $r \cdot n := (r+I)n$ für $r \in R$ und $n \in N$ ein R-Linksmodul, für welchen $IN = 0$.*

(3) *Seien M und N zwei R-Linksmoduln mit $IM = 0$ und $IN = 0$. Zwischen M und N ist eine R-lineare Abbildung dasselbe wie eine R/I-lineare Abbildung.*

Beweis. Zu (1). Es ist $(r+I)\cdot m := rm$ wohldefiniert, da aus $r + I = r' + I$ folgt, daß $(r - r')m = 0$ und also $rm = r'm$. Die Linksmoduleigenschaften vererben sich von der R-Operation auf die R/I-Operation. ▫

Wir dürfen und werden also die R/I-Linksmoduln mit den R-Moduln M, für welche $IM = 0$ ist, identifizieren.

Beispiel 41 Es sind $\mathbf{Z}/3$ und $\mathbf{Z}/2$ beides $\mathbf{Z}/12$-Linksmoduln. Hingegen ist $\mathbf{Z}/8$ kein $\mathbf{Z}/12$-Linksmodul.

1.2.8 Rechts- und Bimoduln

1.2.8.1 Definition Rechtsmoduln

Sei R ein Ring. Analog zu Links- führen wir Rechtsmoduln ein.

Definition 42 Ein *R-Rechtsmodul* ist ein Tripel $(M,+,\cdot)$ aus einer Menge M, einer Abbildung $M \times M \xrightarrow{(+)} M$, $(m,m') \longmapsto m+m'$ (*Addition*) und einer Abbildung $M \times R \xrightarrow{(\cdot)} M$, $(m,r) \longmapsto m \cdot r$ (*Skalarmultiplikation*) derart, daß folgende Axiome gelten.

(RMod 1) Es ist $(M, +)$ eine abelsche Gruppe.

(RMod 2) Es ist $(\cdot)$ assoziativ, i.e. es ist $(m \cdot r) \cdot s = m \cdot (r \cdot s)$ für $m \in M$ und $r,\, s \in R$.

(RMod 3) Es ist $m \cdot 1 = m$ für $m \in M$.

(RMod 4) Es ist $(+, \cdot)$ distributiv, i.e. es ist $m \cdot (r + r') = (m \cdot r) + (m \cdot r')$ und $(m + m') \cdot r = (m \cdot r) + (m' \cdot r)$ für $m,\, m' \in M$ und $r,\, r' \in R$.

Oft schreiben wir kurz $M = M_R = (M, +, \cdot)$. Oft schreiben wir $mr := m \cdot r$ für $m \in M$ und $r \in R$.

Eine Abbildung $M \xrightarrow{f} N$ zwischen R-Rechtsmoduln heißt *R-linear* oder *Morphismus von R-Rechtsmoduln,* falls $(mr + m'r')f = (mf)r + (m'f)r'$ für $m,\, m' \in M$ und $r,\, r' \in R$.

Alle Aussagen, Begriffe und Konstruktionen für R-Linksmoduln und deren R-lineare Abbildungen gelten entsprechend für R-Rechtsmoduln und deren R-lineare Abbildungen.

Beispiel 43 Es sind $(0\ \mathbb{Q})$ und $(\mathbb{Q}\ \mathbb{Q})$ Rechtsmoduln über $\left(\begin{smallmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{smallmatrix}\right)$.

In folgendem Sinne muß für kommutative Ringe nicht zwischen Links- und Rechtsmoduln unterschieden werden.

Bemerkung 44 Sei R ein kommutativer Ring. Sei $M = (M, +, \cdot)$ ein R-Linksmodul. Dann ist $(M, +, *)$ via $m * r := r \cdot m$ für $m \in M$ und $r \in R$ ein R-Rechtsmodul.

1.2.8.2 Definition Bimoduln

Seien R und S Ringe.

Definition 45 Ein *R-S-Bimodul* ist ein Quadrupel $(M, +, \cdot, *)$ aus einer Menge M, einer Abbildung $M \times M \xrightarrow{(+)} M$, $(m, m') \longmapsto m + m'$ (*Addition*), einer Abbildung $R \times M \xrightarrow{(\cdot)} M$, $(r, m) \longmapsto r \cdot m$ (*Skalarmultiplikation links*) und einer Abbildung $M \times S \xrightarrow{(*)} M$, $(m, s) \longmapsto m * s$ (*Skalarmultiplikation rechts*) derart, daß folgende Axiome gelten.

(BiMod 1) Es ist $(M, +, \cdot)$ ein R-Linksmodul.

(BiMod 2) Es ist $(M, +, *)$ ein S-Rechtsmodul.

(BiMod 3) Es ist $r \cdot (m * s) = (r \cdot m) * s$ für $r \in R$, $m \in M$ und $s \in S$.

Oft schreiben wir kurz $M = {}_RM_S = (M, +, \cdot, *)$. Oft schreiben wir $rms = r \cdot m * s := (r \cdot m) * s = r \cdot (m * s)$ für $r \in R$, $m \in M$ und $s \in R$.

Eine Abbildung $M \xrightarrow{f} N$ zwischen R-S-Bimoduln heißt *R-S-linear* oder *Morphismus von R-S-Bimoduln,* falls $(rms + r'm's')f = r(mf)s + r'(m'f)s'$ für $r, r' \in R$, $m, m' \in M$ und $s, s' \in S$.

Alle Aussagen, Begriffe und Konstruktionen für R-Linksmoduln und deren R-lineare Abbildungen gelten entsprechend für R-S-Bimoduln und deren R-S-lineare Abbildungen. Cf. auch Aufgabe 25.(2).

Ein R-Linksmodul ${}_RM$ ist auf eindeutige Weise ein R-$\mathbf{Z}$-Bimodul; entsprechend für R-lineare Abbildungen. Ein S-Rechtsmodul M_S ist auf eindeutige Weise ein $\mathbf{Z}$-S-Bimodul; entsprechend für S-lineare Abbildungen. Jede Aussage für Bimoduln beinhaltet also durch Spezialisierung Aussagen für Links- und Rechtsmoduln.

Beispiel 46

(1) Es ist $\begin{pmatrix} \mathbf{Q} & 0 \\ \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$ ein $\begin{pmatrix} \mathbf{Q} & 0 & 0 \\ \mathbf{Q} & \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$-$\begin{pmatrix} \mathbf{Q} & 0 \\ \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$-Bimodul.

(2) Die Ideale von R sind genau die Teil-R-R-Bimoduln von ${}_RR_R$.

(3) Sei $R = S = \mathbf{C}$. Sei κ die komplexe Konjugation auf $\mathbf{C}$; cf. Beispiel 12.(2).

Wir haben zum einen die $\mathbf{C}$-$\mathbf{C}$-Bimodulstruktur auf $\mathbf{C}$, die durch $r \cdot z * s := rzs$ definiert ist, wobei $r, z, s \in \mathbf{C}$; dieser Bimodul heiße $\mathbf{C}_{\mathrm{id}}$.

Zum anderen haben wir die $\mathbf{C}$-$\mathbf{C}$-Bimodulstruktur auf $\mathbf{C}$, die durch $r \cdot z * s := rz(s\kappa)$ definiert ist, wobei $r, z, s \in \mathbf{C}$; dieser Bimodul heiße $\mathbf{C}_\kappa$.

Wir behaupten, daß ${}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}_{\mathrm{id}})_{\mathbf{C}} \not\cong {}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}_\kappa)_{\mathbf{C}}$. Sei dazu eine $\mathbf{C}$-$\mathbf{C}$-lineare Abbildung $\mathbf{C}_{\mathrm{id}} \xrightarrow{f} \mathbf{C}_\kappa$ betrachtet. Es wird

$$\mathrm{i}f = (\mathrm{i} \cdot 1)f = \mathrm{i} \cdot (1f) = \mathrm{i}(1f) = (1f)\mathrm{i} = (1f) * (-\mathrm{i}) = (1 * (-\mathrm{i}))f = (-\mathrm{i})f .$$

Somit ist f nicht injektiv.

1.2.9 Exakte Sequenzen

Sei R ein Ring.

Definition 47 Seien $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ zwei R-lineare Abbildungen zwischen R-Linksmoduln, auch *Sequenz* genannt.

(1) Die Sequenz $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ heiße *exakt bei M* oder *exakt in der Mitte,* falls $\operatorname{Im} f = \operatorname{Kern} g$.

(2) Die Sequenz $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ heiße *linksexakt,* falls sie exakt in der Mitte ist und f injektiv ist.

(3) Die Sequenz $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ heiße *rechtsexakt,* falls sie exakt in der Mitte ist und g surjektiv ist.

(4) Die Sequenz $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ heiße *kurz exakt,* falls sie exakt in der Mitte ist, f injektiv ist und g surjektiv ist.

Entsprechend für Rechts- und Bimoduln.

Beispiel 48

(1) Die Sequenz $\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z} \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/2$ von $\mathbf{Z}$-Moduln ist kurz exakt.
Die Sequenz $\mathbf{Z}/4 \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/4 \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/4$ von $\mathbf{Z}$-Moduln ist exakt in der Mitte.

(2) Ist $M \xrightarrow{f} N$ eine R-lineare Abbildung zwischen R-Linksmoduln, dann ist die Sequenz $\operatorname{Kern} f \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{f} N$ linksexakt und die Sequenz $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\rho} \operatorname{Cokern} f$ rechtsexakt.

1.2.10 Hom und Tensorprodukt

1.2.10.1 Hom

Seien R, S und T Ringe. Seien $M = {}_RM_S$ und $N = {}_RN_T$ Bimoduln.

Definition 49 Setze

$$\operatorname{Hom}_R(M,N) \;=\; {}_R(M,N) \;:=\; \{M \xrightarrow{f} N \;:\; f \text{ ist } R\text{-linear}\}\ .$$

Bemerkung 50

(1) *Es ist* $\operatorname{Hom}_R(M,N)$ *zusammen mit der wie in Bemerkung* 25.(7) *durch* $m(f+g) := mf + mg$ *für* $f,\, g \in \operatorname{Hom}_R(M,N)$ *und* $m \in M$ *definierten Addition eine abelsche Gruppe.*

(2) *Auf der abelschen Gruppe* $\operatorname{Hom}_R(M,N) = \operatorname{Hom}_R({}_RM_S\,,\, {}_RN_T)$ *ist wie folgt eine* S-T*-Bimodulstruktur definiert. Für* $s \in S$, $f \in \operatorname{Hom}_R({}_RM_S\,,\, {}_RN_T)$ *und* $t \in T$ *setzen wir für gegebenes* $m \in M$

$$m(s \cdot f * t) \;:=\; ((m * s)f) * t\ .$$

(3) *Ist* $N = {}_RN_T$ *ein* R-T*-Bimodul, so ist* $\operatorname{Hom}_R({}_RR_R\,,\, {}_RN_T) \longrightarrow {}_RN_T\,,\ f \longmapsto 1f$ *ein Isomorphismus von* R-T*-Bimoduln.*

Beweis.

Zu (2). Die resultierende Abbildung $s \cdot f * t$ ist R-linear, da sie mit der Addition verträglich ist und da

$$(r \cdot m)(s \cdot f * t) \overset{\text{def}}{=} ((r \cdot m) * s) f * t \;=\; (r \cdot (m * s)) f * t \;=\; r \cdot (m * s) f * t \overset{\text{def}}{=} r \cdot (m(s \cdot f * t))$$

für $r \in R$.

Die Bimoduleigenschaften gelten, siehe Aufgabe 21.(1).

Zu (3). Die angeführte Abbildung ist R-T-linear, da sie mit der Addition verträglich ist und da $r \cdot f * t \longmapsto 1(r \cdot f * t) \overset{\text{def}}{=} (1 * r) f * t = (r \cdot 1) f * t = r \cdot (1f) * t$ für $r \in R$ und $t \in T$.

Sie ist injektiv, da im Falle $f \longmapsto 1f = 0$ folgt, daß $rf = (r \cdot 1)f = r \cdot (1f) = 0$ für $r \in R$ und also $f = 0$.

Bleibt die Surjektivität zu zeigen. Sei $n \in N$ gegeben. Setze $f : R \longrightarrow N$, $r \longmapsto r \cdot n$. Dies ist eine R-lineare Abbildung. Ferner ist $f \longmapsto 1f = 1 \cdot n = n$. □

Setzt man $m(f \cdot r) := (rm)f$ für $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$, $r \in R$ und $m \in M$, so liefert dies deswegen im allgemeinen keine R-Rechtsmodulstruktur auf $\mathrm{Hom}_R(M, N)$, weil das so definierte $f \cdot r$ im allgemeinen keine R-lineare Abbildung ist.

Bemerkung 51

Seien ${}_RM_S \xleftarrow{u} {}_RM'_S \xleftarrow{u'} {}_RM''_S$ *zwei R-S-lineare Abbildungen zwischen R-S-Bimoduln.*

Seien ${}_RN_T \xrightarrow{v} {}_RN'_T \xrightarrow{v'} {}_RN''_T$ *zwei R-T-lineare Abbildungen zwischen R-T-Bimoduln.*

(1) *Wir haben eine S-T-lineare Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_R({}_RM_S\,,\,{}_RN_T) & \xrightarrow{{}_R(u,v) = \mathrm{Hom}_R(u,v)} & \mathrm{Hom}_R({}_RM'_S\,,\,{}_RN'_T) \\ f & \longmapsto & ufv\,. \end{array}$$

Wir schreiben noch ${}_R(u, N) = \mathrm{Hom}_R(u, N) := \mathrm{Hom}_R(u, \mathrm{id}_N)$ *und* ${}_R(M, v) = \mathrm{Hom}_R(M, v) := \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M\,,\,v)$.

Manchmal wird auch kurz $(u, v) := {}_R(u, v) = \mathrm{Hom}_R(u, v)$ *geschrieben, etc.*

(2) *Es ist* $\mathrm{Hom}_R(u, v)\,\mathrm{Hom}_R(u', v') = \mathrm{Hom}_R(u'u, vv')$.

Es ist $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M, \mathrm{id}_N) = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_R(M,N)}$.

Beweis.

Zu (1). Es ist ufv als Kompositum R-linearer Abbildungen wieder R-linear. Die Abbildung $f \longmapsto ufv$ ist mit der Addition verträglich. Sind ferner $s \in S$ und $t \in T$ gegeben, so wird

$$m'(s \cdot (ufv) * t) \overset{\text{def}}{=} (m' * s) ufv * t \;=\; (((m'u) * s) f * t) v \overset{\text{def}}{=} m'(u(s \cdot f * t) v)$$

für $m' \in M'$, und also $s \cdot (ufv) * t = u(s \cdot f * t)v$.

Zu (2). Es wird

$$\begin{aligned} f \operatorname{Hom}_R(u,v) \operatorname{Hom}_R(u',v') &= (ufv) \operatorname{Hom}_R(u',v') \\ &= u'(ufv)v' \\ &= (u'u)f(vv') \\ &= f \operatorname{Hom}_R(u'u, vv') \ . \end{aligned}$$

□

Lemma 52

(1) *Sei* $N' \xrightarrow{j} N \xrightarrow{q} N''$ *eine kurz exakte Sequenz von* R-T-*Bimoduln. Sei* M *ein* R-S-*Bimodul. Dann ist die Sequenz*

$$_R(M,N') \xrightarrow{R(M,j)} {}_R(M,N) \xrightarrow{R(M,q)} {}_R(M,N'')$$

von S-T-*Bimoduln linksexakt.*

(2) *Sei* $M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M''$ *eine kurz exakte Sequenz von* R-S-*Bimoduln. Sei* N *ein* R-T-*Bimodul. Dann ist die Sequenz*

$$_R(M',N) \xleftarrow{R(i,N)} {}_R(M,N) \xleftarrow{R(p,N)} {}_R(M'',N)$$

von S-T-*Bimoduln linksexakt.*

Beweis.

Zu (1). Zur Injektivität von $_R(M,j)$. Sei eine R-lineare Abbildung $M \xrightarrow{f'} N'$ mit $0 = f' \, {}_R(M,j) = f'j$ gegeben. Da j injektiv ist, folgt $f' = 0$.

Zu $\operatorname{Im} {}_R(M,j) \overset{!}{\subseteq} \operatorname{Kern} {}_R(M,q)$. Es ist $_R(M,j) \, {}_R(M,q) = {}_R(M,jq) = {}_R(M,0) = 0$.

Zu $\operatorname{Im} {}_R(M,j) \overset{!}{\supseteq} \operatorname{Kern} {}_R(M,q)$. Sei eine R-lineare Abbildung $M \xrightarrow{f} N$ mit $0 = f \, {}_R(M,q) = fq$ gegeben. Die universelle Eigenschaft von $\operatorname{Kern} q$ aus Bemerkung 39.(1) gibt eine R-lineare Abbildung $M \xrightarrow{\tilde{f}} \operatorname{Kern} q$ mit $\tilde{f}\iota = f$, sowie eine R-lineare Abbildung $N' \xrightarrow{\tilde{j}} \operatorname{Kern} q$ mit $\tilde{j}\iota = j$. Da j injektiv ist, gilt dies auch für $\tilde{j}$. Zeigen wir die Surjektivität von $\tilde{j}$. Sei $n \in \operatorname{Kern} q$. Es ist $n \in \operatorname{Im} j$ wegen der Exaktheit von $N' \xrightarrow{j} N \xrightarrow{q} N''$ bei N. Somit gibt es ein $n' \in N'$ mit $n = n'j = n'\tilde{j}$. Insgesamt ist $\tilde{j}$ also bijektiv. Setze $f' := \tilde{f}\,\tilde{j}^{-1} : M \longrightarrow N'$. Es wird

$$f' \, {}_R(M,j) \ = \ f'j = (\tilde{f}\,\tilde{j}^{-1})(\tilde{j}\iota) \ = \ \tilde{f}\iota \ = \ f \ .$$

Also ist $f \in \operatorname{Im} {}_R(M,j)$.

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Kern} q \arrow[dr, "\iota"] & M \arrow[l, "\tilde{f}"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "0"] & \\ N' \arrow[u, "\tilde{j}", "\wr"'] \arrow[r, "j"] & N \arrow[r, "q"] & N'' \end{tikzcd}$$

Zu (2). Zur Injektivität von ${}_R(p,N)$. Sei eine R-lineare Abbildung $M'' \xrightarrow{g''} N$ mit $0 = g''\,{}_R(p,N) = pg''$ gegeben. Da p surjektiv ist, folgt $g'' = 0$.

Zu $\operatorname{Im}\,{}_R(p,N) \overset{!}{\subseteq} \operatorname{Kern}\,{}_R(i,N)$. Es ist ${}_R(p,N)\,{}_R(i,N) = {}_R(ip,N) = {}_R(0,N) = 0$.

Zu $\operatorname{Im}\,{}_R(p,N) \overset{!}{\supseteq} \operatorname{Kern}\,{}_R(i,N)$. Sei eine R-lineare Abbildung $M \xrightarrow{g} N$ mit $0 = g\,{}_R(i,N) = ig$ gegeben. Die universelle Eigenschaft von $\operatorname{Cokern} i$ aus Bemerkung 39.(2) gibt eine R-lineare Abbildung $\operatorname{Cokern} i \xrightarrow{\tilde g} N$ mit $\rho\tilde g = g$, sowie eine R-lineare Abbildung $\operatorname{Cokern} i \xrightarrow{\tilde p} M''$ mit $\rho\tilde p = p$. Da p surjektiv ist, gilt dies auch für $\tilde p$. Zeigen wir die Injektivität von $\tilde p$. Sei $m \in M$ mit $0 = (m + \operatorname{Im} i)\tilde p = mp$. Somit ist $m \in \operatorname{Kern} p$, wegen der Exaktheit von $M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M''$ bei M also $m \in \operatorname{Im} i$. Es folgt $m + \operatorname{Im} i = 0$. Insgesamt ist $\tilde p$ also bijektiv. Setze $g'' := \tilde p^{-1}\tilde g : M'' \longrightarrow N$. Es wird

$$g''\,{}_R(p,N) \;=\; pg'' \;=\; (\rho\tilde p)(\tilde p^{-1}\tilde g) \;=\; \rho\tilde g \;=\; g\,.$$

Also ist $g \in \operatorname{Im}\,{}_R(p,N)$.

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "0"'] & M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "\rho"] & M'' \\
& N & \operatorname{Cokern} i \arrow[l, "\tilde g"'] \arrow[u, "\tilde p"', "\wr"] &
\end{tikzcd}$$

□

Beispiel 53

(1) Im allgemeinen ist die Sequenz aus Lemma 52.(1) nicht kurz exakt. So etwa ist für die kurz exakte Sequenz $\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z} \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/2$ von $\mathbf{Z}$-Moduln die unter ${}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/2,-)$ resultierende Sequenz

$${}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/2,\mathbf{Z}) \xrightarrow{{}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/2,2)} {}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/2,\mathbf{Z}) \xrightarrow{{}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/2,1)} {}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/2,\mathbf{Z}/2)$$

nicht kurz exakt. In der Tat ist ${}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/2,\mathbf{Z}) \simeq 0$, aber ${}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/2,\mathbf{Z}/2) \simeq \mathbf{Z}/2$.

(2) Im allgemeinen ist die Sequenz aus Lemma 52.(2) nicht kurz exakt. So etwa ist für die kurz exakte Sequenz $\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z} \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/2$ von $\mathbf{Z}$-Moduln die unter ${}_{\mathbf{Z}}(-,\mathbf{Z}/2)$ resultierende Sequenz

$${}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z},\mathbf{Z}/2) \xleftarrow{{}_{\mathbf{Z}}(2,\mathbf{Z}/2)} {}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z},\mathbf{Z}/2) \xleftarrow{{}_{\mathbf{Z}}(1,\mathbf{Z}/2)} {}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/2,\mathbf{Z}/2)$$

nicht kurz exakt. In der Tat ist ${}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z},\mathbf{Z}/2) \simeq \mathbf{Z}/2$; desweiteren schickt die von $\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z}$ induzierte Abbildung ${}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z},\mathbf{Z}/2) \xleftarrow{{}_{\mathbf{Z}}(2,\mathbf{Z}/2)} {}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z},\mathbf{Z}/2)$ den nichtverschwindenden Morphismus $\mathbf{Z} \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/2$ auf $(\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z} \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/2) = (\mathbf{Z} \xrightarrow{0} \mathbf{Z}/2)$. Somit ist diese induzierte Abbildung nicht surjektiv.

1.2.10.2 Tensorprodukt

Das Tensorprodukt versteht man besser über seine universelle Eigenschaft aus untigem Lemma 56 als über seine nun folgende Definition 54.

Sei R ein Ring. Sei M_R ein R-Rechtsmodul. Sei ${}_RN$ ein R-Linksmodul.

Definition 54 Schreibe $e_{m,n} := 1\iota_{(m,n)} \in \coprod_{(m,n)\in M\times N} \mathbf{Z}$ für $m \in M$ und $n \in N$; i.e. $e_{m,n}$ ist das Tupel, das an der Stelle (m,n) den Eintrag 1 und an allen anderen Stellen den Eintrag 0 hat.

Setze

$$\begin{aligned} U \;&:=\; \Big\langle \begin{array}{l} \{e_{m+m',n+n'} - e_{m,n} - e_{m,n'} - e_{m',n} - e_{m',n'} \;:\; m,\, m' \in M,\; n,\, n' \in N\} \\ \cup\; \{e_{mr,n} - e_{m,rn} \;:\; m \in M,\; n \in N,\; r \in R\} \end{array} \Big\rangle_{\mathbf{Z}} \\ &\subseteq\; \textstyle\coprod_{(m,n)\in M\times N} \mathbf{Z}\,. \end{aligned}$$

Definiere das *Tensorprodukt* von M mit N über R als $\mathbf{Z}$-Modul

$$M \underset{R}{\otimes} N \;=\; M_R \underset{R}{\otimes} {}_RN \;:=\; (\textstyle\coprod_{(m,n)\in M\times N} \mathbf{Z})/U\,.$$

Schreibe $m \otimes n := e_{m,n} + U \in M \underset{R}{\otimes} N$ für $m \in M$ und $n \in N$. Wir haben also eine Abbildung

$$\begin{array}{ccccccc} M & \times & N & \xrightarrow{\tau} & M & \underset{R}{\otimes} & N \\ (m & , & n) & \longmapsto & m & \otimes & n\,. \end{array}$$

Ein Element der Form $m \otimes n$ in $M \underset{R}{\otimes} N$ heißt auch *Elementartensor.*

Man darf sich unter $m \otimes n$ ein "noch auszuführendes Produkt von m mit n" vorstellen; cf. auch Lemma 56.

Bemerkung 55

(1) Jedes Element von $\coprod_{(m,n)\in M\times N} \mathbf{Z}$ ist von der Form $\sum_{(m,n)\in M\times N} z_{m,n} e_{m,n}$ mit $z_{m,n} \in \mathbf{Z}$ und $\{(m,n) \in M \times N \;:\; z_{m,n} \neq 0\}$ endlich.

Also ist jedes Element von $M \underset{R}{\otimes} N$ von der Form $\sum_{(m,n)\in M\times N} z_{m,n}\,(m \otimes n)$ mit $z_{m,n} \in \mathbf{Z}$ und $\{(m,n) \in M \times N \;:\; z_{m,n} \neq 0\}$ endlich.

In anderen Worten, es ist $M \underset{R}{\otimes} N = {}_{\mathbf{Z}}\langle m \otimes n \;:\; m \in M,\, n \in N\rangle = {}_{\mathbf{Z}}\langle (M \times N)\tau\rangle$; cf. auch Aufgabe 23.(1).

(2) Es ist $(m + m') \otimes (n + n') = e_{m+m',n+n'} + U = e_{m,n} + e_{m,n'} + e_{m',n} + e_{m',n'} + U = m \otimes n + m \otimes n' + m' \otimes n + m' \otimes n'$ für $m,\, m' \in M$ und $n,\, n' \in N$.

Es ist $mr \otimes n = e_{mr,n} + U = e_{m,rn} + U = m \otimes rn$ für $m \in M$, $n \in N$ und $r \in R$.

(3) Es ist $m \otimes 0 = m \otimes 0 + m \otimes 0 - m \otimes 0 = m \otimes (0+0) - m \otimes 0 = 0$ für $m \in M$.

Genauso ist $0 \otimes n = 0$ für $n \in N$.

Ferner ist $(-m) \otimes n = (-m) \otimes n + m \otimes n - m \otimes n = (-m+m) \otimes n - m \otimes n = -(m \otimes n)$ und genauso $m \otimes (-n) = -(m \otimes n)$ für $m \in M$ und $n \in N$.

Insbesondere ist jedes Element von $M \underset{R}{\otimes} N$ eine Summe von Elementartensoren.

Lemma 56 (Universelle Eigenschaft Tensorprodukt)
*Sei A ein $\mathbf{Z}$-Modul. Eine Abbildung $M \times N \xrightarrow{t} A$ heißt R-*bilinear, *falls*

$$\begin{aligned} (m+m', n+n')t &= (m,n)t + (m,n')t + (m',n)t + (m',n')t \\ (mr,n)t &= (m,rn)t \end{aligned}$$

gelten für m, $m' \in M$, n, $n' \in N$ und $r \in R$.

Es ist τ eine R-bilineare Abbildung; cf. Bemerkung 55.(2).

Ist eine R-bilineare Abbildung $M \times N \xrightarrow{t} A$ gegeben, so gibt es genau eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung $M \underset{R}{\otimes} N \xrightarrow{t'} A$ mit $\tau t' = t$. Für diese ist $(m \otimes n)t' = (m,n)t$ für $m \in M$ und $n \in N$.

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[d, "\tau"'] \arrow[dr, "t"] & \\ M \underset{R}{\otimes} N \arrow[r, dotted, "\exists! t'"'] & A \end{tikzcd}$$

Beweis. Zur Eindeutigkeit von t'. Für $z_{m,n} \in \mathbf{Z}$ für $m \in M$ und $n \in N$ ist notwendigerweise

$$\big(\textstyle\sum_{m,n} z_{m,n}(m \otimes n)\big)t' \;=\; \sum_{m,n} z_{m,n}(m \otimes n)t' \;=\; \sum_{m,n} z_{m,n}(m,n)\tau t' \;=\; \sum_{m,n} z_{m,n}(m,n)t\ .$$

Zur Existenz von t'. Nach Bemerkung 38.(2) existiert eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung $t'' : \coprod_{(m,n) \in M \times N} \mathbf{Z} \longrightarrow A$ mit $\iota_{(m,n)} t'' : \mathbf{Z} \longrightarrow A$, $z \longmapsto z \cdot (m,n)t$ und also insbesondere mit $e_{m,n} t'' = 1 \iota_{(m,n)} t'' = (m,n)t$ für $(m,n) \in M \times N$.

Es wird

$$\begin{aligned} & (e_{m+m',n+n'} - e_{m,n} - e_{m,n'} - e_{m',n} - e_{m',n'})t'' \\ = \;& e_{m+m',n+n'}t'' - e_{m,n}t'' - e_{m,n'}t'' - e_{m',n}t'' - e_{m',n'}t'' \\ = \;& (m+m', n+n')t - (m,n)t - (m,n')t - (m',n)t - (m',n')t \\ = \;& 0 \end{aligned}$$

für m, $m' \in M$ und n, $n' \in N$.

Es wird

$$(e_{mr,n} - e_{m,rn})t'' \;=\; e_{mr,n}t'' - e_{m,rn}t'' \;=\; (mr,n)t - (m,rn)t \;=\; 0$$

für $m \in M$, $n \in N$ und $r \in R$.

Somit ist $Ut'' = 0$; cf. Definition 54. Die universelle Eigenschaft des Faktormoduls liefert also eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung $t' : M \underset{R}{\otimes} N = (\coprod_{(m,n)\in M\times N} \mathbf{Z})/U \longrightarrow A$, die insbesondere $m \otimes n = e_{m,n} + U$ nach $e_{m,n}t'' = (m,n)t$ schickt für $m \in M$ und $n \in N$; cf. Bemerkung 29.

$$
\begin{tikzcd}
(m,n) \arrow[d, mapsto] & M \times N \arrow[d] \arrow[ddr, "t"] & \\
e_{m,n} & \coprod_{(m,n)\in M\times N} \mathbf{Z} \arrow[d, "\rho"'] \arrow[dr, "t''"] & \\
& (\coprod_{(m,n)\in M\times N} \mathbf{Z})/U \arrow[r, "t'"'] & A \\
& = \; M \underset{R}{\otimes} N &
\end{tikzcd}
$$

□

Beispiel 57

(1) Es ist $\mathbf{Z}/3 \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \mathbf{Z}/2 \simeq 0$, da darin $(z + 3\mathbf{Z}) \otimes (w + 2\mathbf{Z}) = (z + 3\mathbf{Z}) \otimes 3(w + 2\mathbf{Z}) = (z + 3\mathbf{Z})3 \otimes (w + 2\mathbf{Z}) = 0 \otimes (w + 2\mathbf{Z}) = 0$; cf. Bemerkung 55.(1, 2, 3).

(2) Seien allgemeiner m, $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$. Sei $g := \mathrm{ggT}(m,n)$. Es ist $g = sm + tn$ für gewisse s, $t \in \mathbf{Z}$. Die Abbildung

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathbf{Z}/m & \times & \mathbf{Z}/n & \longrightarrow & \mathbf{Z}/g \\
(z + m\mathbf{Z} & , & w + n\mathbf{Z}) & \longmapsto & zw + g\mathbf{Z}
\end{array}
$$

ist wohldefiniert und $\mathbf{Z}$-bilinear. Mit Lemma 56 gibt es also die $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathbf{Z}/m & \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} & \mathbf{Z}/n & \xrightarrow{u} & \mathbf{Z}/g \\
(z + m\mathbf{Z}) & \otimes & (w + n\mathbf{Z}) & \longmapsto & zw + g\mathbf{Z}
\end{array}
$$

Ferner gibt es die $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathbf{Z}/m & \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} & \mathbf{Z}/n & \xleftarrow{v} & \mathbf{Z}/g \\
(z + m\mathbf{Z}) & \otimes & (1 + n\mathbf{Z}) & \longleftarrow & z + g\mathbf{Z}\ ,
\end{array}
$$

da $(g + m\mathbf{Z}) \otimes (1 + n\mathbf{Z}) = (sm + tn + m\mathbf{Z}) \otimes (1 + n\mathbf{Z}) = (tn + m\mathbf{Z}) \otimes (1 + n\mathbf{Z}) = (t + m\mathbf{Z}) \otimes (n + n\mathbf{Z}) = 0$.

Offenbar ist $vu = \mathrm{id}$. Umgekehrt ist für z, $w \in \mathbf{Z}$ auch $((z + m\mathbf{Z}) \otimes (w + n\mathbf{Z}))uv = (zw + g\mathbf{Z})v = (zw + m\mathbf{Z}) \otimes (1 + n\mathbf{Z}) = (z + m\mathbf{Z}) \otimes (w + n\mathbf{Z})$. Somit ist $uv = \mathrm{id}$, da dies auf $\mathbf{Z}$-linearen Erzeugern nachgerechnet wurde. Also ist u ein Isomorphismus.

Bemerkung 58 *Seien R, S und T Ringe.*
Sei $M = {}_SM_R$ ein S-R-Bimodul. Sei $N = {}_RN_T$ ein R-T-Bimodul.

(1) *Es gibt auf der abelschen Gruppe ${}_SM_R \underset{R}{\otimes} {}_RN_T$ eine S-T-Bimodulstruktur, für welche $s \cdot (m \otimes n) * t = (s \cdot m) \otimes (n * t)$ ist für $m \in M$, $n \in N$, $s \in S$ und $t \in T$.*

(2) *Es gibt den Isomorphismus*

$$\begin{array}{ccccc} {}_RR_R & \underset{R}{\otimes} & {}_RN_T & \xrightarrow{\sim} & {}_RN_T \\ r & \otimes & n & \longmapsto & r \cdot n \\ 1 & \otimes & n & \longleftarrow\!\shortmid & n \end{array}$$

von R-T-Bimoduln.

(3) *Es gibt den Isomorphismus*

$$\begin{array}{ccccc} {}_SM_R & \underset{R}{\otimes} & {}_RR_R & \xrightarrow{\sim} & {}_SM_R \\ m & \otimes & r & \longmapsto & m * r \\ m & \otimes & 1 & \longleftarrow\!\shortmid & m \end{array}$$

von S-R-Bimoduln.

Beweis.
Zu (1). Seien $s \in S$ und $t \in T$ gegeben. Die Abbildung

$$\begin{array}{ccccccc} M & \times & N & \xrightarrow{\lambda'_{s,t}} & M & \underset{R}{\otimes} & N \\ (m & , & n) & \longmapsto & (s \cdot m) & \otimes & (n * t) \end{array}$$

ist R-bilinear. Mit Lemma 56 gibt es die $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung

$$\begin{array}{ccccccc} M & \underset{R}{\otimes} & N & \xrightarrow{\lambda_{s,t}} & M & \underset{R}{\otimes} & N \\ m & \otimes & n & \longmapsto & (s \cdot m) & \otimes & (n * t)\,. \end{array}$$

Definiert man nun

$$\begin{array}{ccccc} S & \times & (M \underset{R}{\otimes} N) & \xrightarrow{(\cdot)} & M \underset{R}{\otimes} N \\ (\ s & , & \xi\ ) & \longmapsto & s \cdot \xi \ := \ \xi\lambda_{s,1} \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccccc} (M \underset{R}{\otimes} N) & \times & T & \xrightarrow{(*)} & M \underset{R}{\otimes} N \\ (\ \xi & , & t\ ) & \longmapsto & \xi * t \ := \ \xi\lambda_{1,t}\,, \end{array}$$

so rechnet man nach, daß $(M \underset{R}{\otimes} N, +, \cdot, *)$ ein S-T-Bimodul mit der verlangten Eigenschaft ist; cf. Aufgabe 21.(2).

Zu (2). Die Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} R & \times & N & \longrightarrow & N \\ (r & , & n) & \longmapsto & r \cdot n \end{array}$$

ist R-bilinear. Mit Lemma 56 gibt es eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} R & \underset{R}{\otimes} & N & \xrightarrow{\mu} & N \\ r & \otimes & n & \longmapsto & r \cdot n \end{array}$$

Da

$$\big(r' \cdot (\textstyle\sum_i r_i \otimes n_i) * t\big)\mu = \sum_i (r' \cdot r_i \otimes n_i * t)\mu = \sum_i r' \cdot r_i \cdot n_i * t = r' \cdot (\sum_i r_i \cdot n_i) * t = r' \cdot (\sum_i r_i \otimes n_i)\mu * t$$

für r', $r_i \in R$, $n_i \in N$ und $t \in T$, ist μ eine R-T-lineare Abbildung.

In entgegengesetzter Richtung gibt es die $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} R & \underset{R}{\otimes} & N & \xleftarrow{\nu} & N \\ 1 & \otimes & n & \longmapsfrom & n \end{array}$$

Es ist $n\nu\mu = (1 \otimes n)\mu = n$ für $n \in N$, also $\nu\mu = \mathrm{id}_N$. Ferner ist

$$\begin{array}{rcl} (\sum_i r_i \otimes n_i)\mu\nu & = & \sum_i (r_i \otimes n_i)\mu\nu \\ & = & \sum_i (r_i \cdot n_i)\nu \\ & = & \sum_i 1 \otimes r_i \cdot n_i \\ & = & \sum_i 1 * r_i \otimes n_i \\ & = & \sum_i r_i \otimes n_i \ , \end{array}$$

wobei $r_i \in R$ und $n_i \in N$, und also $\mu\nu = \mathrm{id}_{R \underset{R}{\otimes} N}$. Somit ist μ bijektiv. □

Bemerkung 59 *Seien R, S und T Ringe.*

Seien ${}_SM_R \xrightarrow{u} {}_SM'_R \xrightarrow{u'} {}_SM''_R$ zwei S-R-lineare Abbildungen zwischen S-R-Bimoduln.

Seien ${}_RN_T \xrightarrow{v} {}_RN'_T \xrightarrow{v'} {}_RN''_T$ zwei R-T-lineare Abbildungen zwischen R-T-Bimoduln.

(1) *Wir haben eine S-T-lineare Abbildung*

$$\begin{array}{ccccccc} {}_SM_R & \underset{R}{\otimes} & {}_RN_T & \xrightarrow{u \underset{R}{\otimes} v} & {}_SM'_R & \underset{R}{\otimes} & {}_RN'_T \\ m & \otimes & n & \longmapsto & mu & \otimes & nv \ . \end{array}$$

Wir schreiben noch $M \underset{R}{\otimes} v := \mathrm{id}_M \underset{R}{\otimes} v$ und $u \underset{R}{\otimes} N := u \underset{R}{\otimes} \mathrm{id}_N$.

Manchmal wird auch kurz $u \otimes v := u \underset{R}{\otimes} v$ geschrieben, etc.

(2) *Es ist* $(u \underset{R}{\otimes} v)(u' \underset{R}{\otimes} v') = (uu' \underset{R}{\otimes} vv')$.
Es ist $\mathrm{id}_M \underset{R}{\otimes} \mathrm{id}_N = \mathrm{id}_{M \underset{R}{\otimes} N}$.

Beweis. Zu (1). Die Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} {}_SM_R & \times & {}_RN_T & \longrightarrow & {}_SM'_R \underset{R}{\otimes} {}_RN'_T \\ (m & , & n) & \longmapsto & mu \otimes nv \,. \end{array}$$

ist R-bilinear. Mit Lemma 56 gibt es die $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} {}_SM_R & \underset{R}{\otimes} & {}_RN_T & \xrightarrow{u \underset{R}{\otimes} v} & {}_SM'_R \underset{R}{\otimes} {}_RN'_T \\ m & \otimes & n & \longmapsto & mu \otimes nv \,. \end{array}$$

Diese ist nun auch S-T-linear, wie man auf den Elementartensoren sieht.

Zu (2). Es genügt, die jeweiligen Abbildungen auf Elementartensoren zu vergleichen, da diese das Tensorprodukt $\mathbf{Z}$-linear erzeugen.

Für $m \in M$ und $n \in N$ wird $(m \otimes n)(u \otimes v)(u' \otimes v') = (mu \otimes nv)(u' \otimes v') = muu' \otimes nvv' = (m \otimes n)(uu' \otimes vv')$. ▫

Lemma 60

(1) *Gegeben eine kurz exakte Sequenz* $M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M''$ *von* S-R-*Bimoduln und ein* R-T-*Bimodul* N. *Dann ist die Sequenz*

$$M' \underset{R}{\otimes} N \xrightarrow{i \otimes N} M \underset{R}{\otimes} N \xrightarrow{p \otimes N} M'' \underset{R}{\otimes} N$$

von S-T-*Bimoduln rechtsexakt.*

(2) *Gegeben ein* S-R-*Bimodul* M *und eine kurz exakte Sequenz* $N' \xrightarrow{j} N \xrightarrow{q} N''$ *von* R-T-*Bimoduln. Dann ist die Sequenz*

$$M \underset{R}{\otimes} N' \xrightarrow{M \otimes j} M \underset{R}{\otimes} N \xrightarrow{M \otimes q} M \underset{R}{\otimes} N''$$

von S-T-*Bimoduln rechtsexakt.*

Beweis. Zu (1). Es ist $p \otimes N$ surjektiv, da wegen p surjektiv jeder Elementartensor von $M'' \underset{R}{\otimes} N$ im Bild von $p \otimes N$ liegt, und also, da $p \otimes N$ mit Summen vertauscht, jedes Element von $M'' \underset{R}{\otimes} N$ im Bild von $p \otimes N$ liegt.

Es ist $(i \otimes N)(p \otimes N) = ip \otimes N = 0 \otimes N = 0$. Also ist $\mathrm{Im}(i \otimes N) \subseteq \mathrm{Kern}(p \otimes N)$.

Wir haben eine Abbildung $M'' \times N \xrightarrow{f} \mathrm{Cokern}(i \otimes N)$, die $(m'', n) \longmapsto m \otimes n + \mathrm{Im}(i \otimes N)$ schickt, wobei $m \in M$ mit $mp = m''$ gewählt werde. Hierzu ist zu zeigen, daß das Bild

nicht von der Wahl dieses Elements m abhängt. Seien also $m,\ \tilde{m} \in M$ mit $mp = m'' = \tilde{m}p$ gegeben. Dann ist $m - \tilde{m} \in \operatorname{Kern} p = \operatorname{Im} i$. Also gibt es ein $m' \in M'$ mit $m - \tilde{m} = m'i$. Somit ist auch $m \otimes n - \tilde{m} \otimes n = (m - \tilde{m}) \otimes n = m'i \otimes n \in \operatorname{Im}(i \otimes N)$.

Diese Abbildung f ist R-bilinear. Denn seien zum einen $m'',\ \tilde{m}'' \in M''$ und $n,\ \tilde{n} \in N$ gegeben. Wähle $m \in M$ mit $mp = m''$ und $\tilde{m} \in M$ mit $\tilde{m}p = \tilde{m}''$. Dann ist auch $(m + \tilde{m})p = m'' + \tilde{m}''$. Somit wird

$$\begin{aligned}(m'' + \tilde{m}'', n + \tilde{n})f &= (m + \tilde{m}) \otimes (n + \tilde{n}) + \operatorname{Im}(i \otimes N) \\ &= m \otimes n + m \otimes \tilde{n} + \tilde{m} \otimes n + \tilde{m} \otimes \tilde{n} + \operatorname{Im}(i \otimes N) \\ &= (m'', n)f + (m'', \tilde{n})f + (\tilde{m}'', n)f + (\tilde{m}'', \tilde{n})f\ .\end{aligned}$$

Seien zum anderen $m'' \in M''$, $n \in N$ und $r \in R$ gegeben. Wähle $m \in M$ mit $mp = m''$. Dann wird $(mr)p = mpr = m''r$. Somit wird

$$\begin{aligned}(m''r, n)f &= mr \otimes n + \operatorname{Im}(i \otimes N) \\ &= m \otimes rn + \operatorname{Im}(i \otimes N) \\ &= (m'', rn)f\ .\end{aligned}$$

Wir erhalten also eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung $M'' \underset{R}{\otimes} N \xrightarrow{g} \operatorname{Cokern}(i \otimes N)$ mit $(m'' \otimes n)g = m \otimes n + \operatorname{Im}(i \otimes N)$, wobei $m'' \in M''$, $n \in N$ und $m \in M$ so, daß $mp = m''$. Insbesondere ist für $m \in M$ und $n \in N$ auch $(m \otimes n)(p \otimes N)g = (mp \otimes n)g = m \otimes n + \operatorname{Im}(i \otimes N) = (m \otimes n)\rho$. Es folgt $(p \otimes N)g = \rho$.

Ist also $\xi \in \operatorname{Kern}(p \otimes N)$, so ist $\xi + \operatorname{Im}(i \otimes N) = \xi\rho = \xi(p \otimes N)g = 0$, i.e. $\xi \in \operatorname{Im}(i \otimes N)$. Dies zeigt $\operatorname{Im}(i \otimes N) \supseteq \operatorname{Kern}(p \otimes N)$.

Insgesamt ist $\operatorname{Im}(i \otimes N) = \operatorname{Kern}(p \otimes N)$.

$$\begin{tikzcd}
M' \underset{R}{\otimes} N \arrow[r, "i \otimes N"] & M \underset{R}{\otimes} N \arrow[r, "p \otimes N"] \arrow[dr, "\rho"'] & M'' \underset{R}{\otimes} N \arrow[d, "g"] \\
 & & \operatorname{Cokern}(i \otimes N)
\end{tikzcd}$$

□

Beispiel 61 Sei $R = \mathbf{Z}$. Es ist $\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z}$ injektiv, nicht aber $\mathbf{Z}/2 \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \mathbf{Z} \xrightarrow{\mathbf{Z}/2 \otimes 2} \mathbf{Z}/2 \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \mathbf{Z}$. In der Tat schickt unter Verwendung von Bemerkung 58.(3) das Kompositum

$$(\mathbf{Z}/2 \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}/2 \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \mathbf{Z} \xrightarrow{\mathbf{Z}/2 \otimes 2} \mathbf{Z}/2 \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \mathbf{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}/2)$$

das Element 1 auf $1 \otimes 1$, sodann auf $1 \otimes 2$ und schließlich auf $1 \cdot 2 = 0$.

Also resultieren in Lemma 60 im allgemeinen nur rechtsexakte, nicht aber kurz exakte Sequenzen.

1.2.10.3 Zusammenhang Hom und Tensorprodukt

Seien R, S und T Ringe.

Lemma 62
Sei ${}_RM_S \xleftarrow{f} {}_RM'_S$ *eine R-S-lineare Abbildung zwischen R-S-Bimoduln.*

Sei ${}_RN \xrightarrow{g} {}_RN'$ *eine R-lineare Abbildung zwischen R-Linksmoduln.*

Sei ${}_SX \xleftarrow{h} {}_SX'$ *eine S-lineare Abbildung zwischen S-Linksmoduln.*

(1) *Es gibt den Isomorphismus von* $\mathbf{Z}$*-Moduln*

$$\begin{array}{rcl} {}_R\big({}_RM_S \underset{S}{\otimes} {}_SX,\ {}_RN\big) & \overset{\alpha_{X,M,N}}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} & {}_S\big({}_SX,\ {}_R({}_RM_S\,,\ {}_RN)\big) \\ \varphi & \longmapsto & \big(x \mapsto (m \mapsto (m \otimes x)\varphi)\big) \\ (m \otimes x \mapsto m(x\psi)) & \longleftarrow\!\shortmid & \psi \end{array}$$

(2) *Das Viereck*

$$\begin{tikzcd} {}_R\big({}_RM_S \underset{S}{\otimes} {}_SX,\ {}_RN\big) \arrow[r, "\alpha_{X,M,N}", "\sim"'] \arrow[d, "{}_R(f \underset{S}{\otimes} h,\, g)"'] & {}_S\big({}_SX,\ {}_R({}_RM_S\,,\ {}_RN)\big) \arrow[d, "{}_S(h,\, {}_R(f,g))"] \\ {}_R\big({}_RM'_S \underset{S}{\otimes} {}_SX',\ {}_RN'\big) \arrow[r, "\alpha_{X',M',N'}", "\sim"'] & {}_S\big({}_SX',\ {}_R({}_RM'_S\,,\ {}_RN')\big) \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Cf. auch Aufgabe 56.

Beweis.

Zu (1).

Zur Wohldefiniertheit von $\alpha_{X,M,N}$.

Sei $x \in X$ gegeben. Es ist $M \longrightarrow N$, $m \longmapsto (m \otimes x)\varphi$ eine R-lineare Abbildung, da sie mit der Addition verträglich ist und da für $r \in R$ und $m \in M$ sich

$$((rm) \otimes x)\varphi \;=\; (r(m \otimes x))\varphi \;=\; r((m \otimes x)\varphi)$$

ergibt.

Es ist ${}_SX \longrightarrow {}_R(M,N)$, $x \mapsto (m \mapsto (m \otimes x)\varphi)$ eine S-lineare Abbildung, da sie mit der Addition verträglich ist und für $s \in S$ und $x \in X$ sich

$$(m \mapsto (m \otimes sx)\varphi) \;=\; (m \mapsto (ms \otimes x)\varphi) \;=\; s(m \mapsto (m \otimes x)\varphi)$$

ergibt.

Ferner ist $\alpha_{X,M,N}$ eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung.

Zur Wohldefiniertheit des angegebenen Inversen von $\alpha_{X,M,N}$.

Die Abbildung $M \times X \longrightarrow N$, $(m,x) \longmapsto m(x\psi)$ ist S-bilinear. Denn sie ist additiv in m und x ; ferner ist für $m \in M$, $x \in X$ und $s \in S$

$$m((sx)\psi) \;=\; m(s(x\psi)) \;=\; (ms)(x\psi)\ .$$

Also gibt es eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung $M \underset{S}{\otimes} X \longrightarrow N$, $m \otimes x \longmapsto m(x\psi)$. Diese ist auch R-linear, da für $m \in M$, $x \in X$ und $r \in R$ sich

$$r(m \otimes x) \;=\; (rm) \otimes x \;\longmapsto\; (rm)(x\psi) \;=\; r(m(x\psi))$$

ergibt.

Ferner ist auch das angegebene Inverse von $\alpha_{X,M,N}$ eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung.

Zur gegenseitigen Inversion auf der linken Seite. Es kommt $\varphi \in {}_R({}_RM_S \underset{S}{\otimes} {}_SX,\ {}_RN)$ auf $\psi := \big(x \mapsto (m \mapsto (m \otimes x)\varphi)\big)$, und dies wieder zurück auf

$$\big(m \otimes x \longmapsto m(x\psi) = m(m \mapsto (m \otimes x)\varphi) = (m \otimes x)\varphi\big) \;=\; \varphi\ .$$

Zur gegenseitigen Inversion auf der rechten Seite. Es kommt $\psi \in {}_S({}_SX,\ {}_R(M,N))$ auf $\varphi := (m \otimes x \mapsto m(x\psi))$, und dies wieder zurück auf

$$\big(x \mapsto (m \mapsto (m \otimes x)\varphi = m(x\psi))\big) \;=\; \big(x \mapsto x\psi\big) \;=\; \psi\ .$$

Zu (2). Siehe Aufgabe 26. □

1.2.11 Projektiv und injektiv

Sei R ein Ring.

1.2.11.1 Projektive Moduln

Definition 63 Ein R-Linksmodul P heißt *projektiv,* falls für jede surjektive R-lineare Abbildung $M \xrightarrow{g} M''$ zwischen R-Linksmoduln die Abbildung

$${}_R(P,M) \xrightarrow{{}_R(P,g)} {}_R(P,M'')$$

surjektiv ist.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "\exists u"'] \arrow[d, "v"] \\ M \arrow[r, "g"'] & M'' \end{tikzcd}$$

In anderen Worten, P ist projektiv, falls $\mathrm{Hom}_R(P,-)$ kurz exakte Sequenzen von R-Linksmoduln in kurz exakte Sequenzen von $\mathbf{Z}$-Moduln überführt; cf. Lemma 52.(1).

Bemerkung 64

(1) *Sei A eine Menge. Sei für jedes $\alpha \in A$ ein projektiver R-Linksmodul P_α gegeben. Dann ist $\coprod_{\alpha\in A} P_\alpha$ projektiv.*

(2) *Sind X und Y zwei R-Linksmoduln so, daß $X \oplus Y$ projektiv ist, dann sind auch X und Y projektiv.*

(3) *Ein R-Linksmodul X ist genau dann projektiv, wenn es eine Menge B und einen R-Linksmodul Y so gibt, daß $X \oplus Y \simeq \coprod_{\beta\in B} R$. Insbesondere ist also $R^{\oplus n}$ projektiv für $n \geqslant 0$.*

(4) *Für jeden R-Linksmodul M gibt es eine surjektive R-lineare Abbildung $P \longrightarrow M$ von einem projektiven R-Linksmodul P.*

Beweis. Siehe Aufgabe 28.

1.2.11.2 Injektive Moduln

Definition 65 Ein R-Linksmodul I heißt *injektiv,* falls für jede injektive R-lineare Abbildung $M' \xrightarrow{f} M$ zwischen R-Linksmoduln die Abbildung

$$_R(M', I) \xleftarrow{\ _R(f,I)\ } {}_R(M, I)$$

surjektiv ist.

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[dl, dotted, "\exists v"] \\ I & \end{tikzcd}$$

In anderen Worten, I ist injektiv, falls $\mathrm{Hom}_R(-,I)$ kurz exakte Sequenzen in kurz exakte Sequenzen überführt; cf. Lemma 52.(2).

Bemerkung 66

(1) *Sei A eine Menge. Sei für jedes $\alpha \in A$ ein injektiver R-Linksmodul I_α gegeben. Dann ist $\prod_{\alpha\in A} I_\alpha$ injektiv.*

(2) *Sind X und Y zwei R-Linksmoduln so, daß $X \oplus Y$ injektiv ist, dann sind auch X und Y injektiv.*

Beweis. Siehe Aufgabe 29.

Lemma 67 *Sei Q ein $\mathbf{Z}$-Modul, in welchem für jedes $q \in Q$ und jedes $k \in \mathbf{Z} \smallsetminus \{0\}$ ein $\tilde{q}$ mit $k\tilde{q} = q$ existiert; ein solcher $\mathbf{Z}$-Modul heißt auch* divisibel. *Es ist Q injektiv.*

Es sind e.g. $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ divisibel.

Wir werden Zorns Lemma verwenden; cf. e.g. [**7,** Anh. A].

Beweis. Sei eine injektive $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung $M' \xrightarrow{f} M$ zwischen abelschen Gruppen gegeben. Wir haben zu zeigen, daß ${}_{\mathbf{Z}}(f, Q)$ surjektiv ist. O.E. ist $M' \subseteq M$ ein Teilmodul und f die Inklusionsabbildung. Sei eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung $M' \xrightarrow{g'} Q$ gegeben. Wir müssen zeigen, daß eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung $M \xrightarrow{g} Q$ mit $g' = g\,{}_{\mathbf{Z}}(f, Q) = fg = g|_{M'}$ existiert.

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, hook, "f"] \arrow[d, "g'"'] & M \arrow[dl, dotted, "\exists g"] \\ Q & \end{tikzcd}$$

Sei

$$\mathcal{F} \;:=\; \{(N, h) \;:\; M' \subseteq N \subseteq M \text{ ist Teilmodul, } N \xrightarrow{h} Q \text{ ist } \mathbf{Z}\text{-linear mit } h|_{M'} = g'\} \;.$$

Zum Beispiel ist $(M', g') \in \mathcal{F}$. Es ist $\mathcal{F}$ teilgeordnet vermöge $(N_1\,,\, h_1) \leqslant (N_2\,,\, h_2) :\Longleftrightarrow N_1 \subseteq N_2$ und $h_2|_{N_1} = h_1$. Um das Lemma von Zorn auf $\mathcal{F}$ anzuwenden, haben wir zu zeigen, daß jede totalgeordnete Teilmenge $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{F}$ in $\mathcal{F}$ eine obere Schranke besitzt.

O.E. ist $\mathcal{T} \neq \emptyset$. Sei $N_{\mathcal{T}} := \bigcup_{N \in \mathcal{T}} N$. Es ist $M' \subseteq N_{\mathcal{T}} \subseteq M$. Es ist $N_{\mathcal{T}} \subseteq M$ ein $\mathbf{Z}$-Teilmodul, da $0 \in N_{\mathcal{T}}$ und da für $z_1\,,\, z_2 \in \mathbf{Z}$ und $m_1\,,\, m_2 \in N_{\mathcal{T}}$ Elemente $(N_1\,, h_1)$, $(N_2\,, h_2) \in \mathcal{T}$ so existieren, daß $m_1 \in N_1$ und $m_2 \in N_2$; da o.E. $(N_1\,, h_1) \leqslant (N_2\,, h_2)$, ist also $z_1 m_1 + z_2 m_2 \in N_2 \subseteq N_{\mathcal{T}}$. Setze $h_{\mathcal{T}} : N_{\mathcal{T}} \longrightarrow M$, $m \longmapsto m h_1$, wobei $(N_1\,, h_1) \in \mathcal{T}$ so gewählt ist, daß $m \in N_1$. Ist $(N_2\,, h_2) \in \mathcal{T}$ mit $m \in N_2$ eine alternative Wahl, so ist o.E. $(N_1\,, h_1) \leqslant (N_2\,, h_2)$, also $h_2|_{N_1} = h_1$ und mithin $m h_1 = m h_2$. Somit ist $h_{\mathcal{T}}$ eine wohldefinierte Abbildung. Es ist $h_{\mathcal{T}}$ auch $\mathbf{Z}$-linear, da für $m_1\,,\, m_2 \in N_{\mathcal{T}}$ Elemente $(N_1\,, h_1)$, $(N_2\,, h_2) \in \mathcal{T}$ so existieren, daß $m_1 \in N_1$ und $m_2 \in N_2$; da o.E. $(N_1\,, h_1) \leqslant (N_2\,, h_2)$, ist also für $z_1,\, z_2 \in \mathbf{Z}$

$$(z_1 m_1 + z_2 m_2) h_{\mathcal{T}} \;=\; (z_1 m_1 + z_2 m_2) h_2 \;=\; z_1(m_1 h_2) + z_2(m_2 h_2) \;=\; z_1(m_1 h_{\mathcal{T}}) + z_2(m_2 h_{\mathcal{T}}) \;.$$

Schließlich ist $h_{\mathcal{T}}|_{M'} = g'$. Insgesamt ist $(N_{\mathcal{T}}, h_{\mathcal{T}}) \in \mathcal{F}$.

Ferner ist nach Konstruktion $(N, h) \leqslant (N_{\mathcal{T}}, h_{\mathcal{T}})$ für alle $(N, h) \in \mathcal{T}$.

Somit können wir Zorns Lemma anwenden und insbesondere folgern, daß das Element $(M', g') \in \mathcal{F}$ in einem maximalen Element (N, h) von $\mathcal{F}$ bezüglich $(\leqslant)$ enthalten ist.

Annahme, es ist $N \subsetneq M$. Sei $m \in M \smallsetminus N$. Sei

$$\tilde{N} \;:=\; {}_{\mathbf{Z}}\langle N \cup \{m\}\rangle = \{n + zm \;:\; n \in N,\; z \in \mathbf{Z}\} \;.$$

Es ist $M' \subseteq N \subsetneq \tilde{N} \subseteq M$.

Fall $N \cap \mathbf{Z}m = 0$. Ist $n + zm = n' + z'm$ für $n,\, n' \in N$ und $z,\, z' \in \mathbf{Z}$, so ist $n - n' = (z' - z)m \in N \cap \mathbf{Z}m = 0$, und also bereits $n = n'$. Folglich ist $\tilde{h} : \tilde{N} \longrightarrow Q$, $n + zm \longmapsto nh$ wohldefiniert. Wie h ist auch $\tilde{h}$ eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung. Es ist $\tilde{h}|_N = h$. Insgesamt ist $(N, h) < (\tilde{N}, \tilde{h})$ in $\mathcal{F}$. Wir sind diesenfalls bei einem *Widerspruch* angelangt.

Fall $N \cap \mathbf{Z}m \neq 0$. Es ist $\{z \in \mathbf{Z} \ : \ zm \in N\} = k\mathbf{Z}$ für ein $k \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$; cf. Aufgabe 4.(1). Nach Fallvoraussetzung ist $k \neq 0$. Wegen der Divisibilität von Q gibt es ein $\tilde{q} \in Q$ mit $k\tilde{q} = (km)h$. Setze

$$\begin{array}{ccc} \tilde{N} & \xrightarrow{\tilde{h}} & Q \\ n + zm & \longmapsto & nh + z\tilde{q} \end{array}$$

Sind $z,\, z' \in \mathbf{Z}$ und $n,\, n' \in N$ mit $n + zm = n' + z'm$, so ist $(z' - z)m = n - n' \in N$, also $z' - z = \ell k$ für ein $\ell \in \mathbf{Z}$, und es wird

$$\begin{aligned} (nh + z\tilde{q}) - (n'h + z'\tilde{q}) &= (n - n')h - (z' - z)\tilde{q} \\ &= ((z' - z)m)h - (z' - z)\tilde{q} \\ &= (\ell km)h - \ell k\tilde{q} \\ &= \ell\big((km)h - k\tilde{q}\big) \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Somit ist $\tilde{h}$ wohldefiniert. Da h eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung ist, gilt dies auch für $\tilde{h}$. Ferner ist $\tilde{h}|_N = h$. Insgesamt ist $(N, h) < (\tilde{N}, \tilde{h})$ in $\mathcal{F}$. Wir sind diesenfalls bei einem *Widerspruch* angelangt.

Also ist $N = M$, und wir können $g := h$ verwenden. ▫

Satz 68 *Für jeden R-Linksmodul X gibt es eine injektive R-lineare Abbildung $X \longrightarrow I$ in einen injektiven R-Linksmodul I.*

Beweis. Sei M ein $\mathbf{Z}$-Modul. Wir *behaupten,* daß es eine injektive $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung von M in einen injektiven $\mathbf{Z}$-Modul gibt.

Sei $m \in M \smallsetminus \{0\}$. Es ist $\{z \in \mathbf{Z} \ : \ zm = 0\} = k\mathbf{Z}$ für ein $k \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$; cf. Aufgabe 4.(1).

Fall $k = 0$. Wir haben einen $\mathbf{Z}$-linearen Isomorphismus $\mathbf{Z}m \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}$, $m \longmapsto 1$; cf. Lemma 30. Wir können komponieren zu einer injektiven $\mathbf{Z}$-linearen Abbildung $\mathbf{Z}m \longrightarrow \mathbf{Q}$, $m \longmapsto 1$. Da $\mathbf{Q}$ nach Lemma 67 injektiv ist, gibt es also eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung $f_m : M \longrightarrow \mathbf{Q} =: Q_m$, welche auf die vorgenannte einschränkt, welche also insbesondere m nicht auf 0 abbildet.

Fall $k = 1$. Tritt wegen $m \neq 0$ nicht auf.

Fall $k \geqslant 2$. Wir haben einen $\mathbf{Z}$-linearen Isomorphismus $\mathbf{Z}m \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}/k$, $m \longmapsto 1$; cf. Lemma 30. Wir können komponieren zu einer injektiven $\mathbf{Z}$-linearen Abbildung $\mathbf{Z}m \longrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, $m \longmapsto \frac{1}{k} + \mathbf{Z}$. Da $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ nach Lemma 67 injektiv ist, gibt es also eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung $f_m : M \longrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z} =: Q_m$, welcher auf die vorgenannte einschränkt, welche also insbesondere m nicht auf 0 abbildet.

Nach Lemma 67 und Bemerkung 66.(1) ist $\prod_{m \in M \smallsetminus \{0\}} Q_m$ injektiv. Sei $M \xrightarrow{f} \prod_{m \in M \smallsetminus \{0\}} Q_m$ mit $f\pi_m = f_m$ für $m \in M$; cf. Bemerkung 38.(1). Es ist f

eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung, welche nur 0 auf 0 abbildet, da für $m \in M \smallsetminus \{0\}$ ja $mf\pi_m = mf_m \neq 0$, welche also injektiv ist; cf. Bemerkung 38.(1). Dies zeigt die *Behauptung.*

Zurück zum gegebenen R-Linksmodul X. Mit der Behauptung können wir eine injektive $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung

$$ {}_{\mathbf{Z}}R_R \underset{R}{\otimes} {}_RX \xrightarrow{f} {}_{\mathbf{Z}}J $$

in einen injektiven $\mathbf{Z}$-Linksmodul ${}_{\mathbf{Z}}J$ wählen. Via Lemma 62.(1) erhalten wir die R-lineare Abbildung

$$ \begin{array}{ccc} {}_RX & \xrightarrow{g} & {}_{\mathbf{Z}}({}_{\mathbf{Z}}R_R\,,\, {}_{\mathbf{Z}}J) \\ x & \longmapsto & (r \longmapsto (r \otimes x)f) \end{array} $$

Für $x \in X$ bedeutet $xg = 0$ gerade, daß $(r \otimes x)f = 0$ für alle $r \in R$. Die Injektivität von f liefert also insbesondere $1 \otimes x = 0$. Die Abbildung $R \underset{R}{\otimes} X \longrightarrow X$, $r \otimes x \longmapsto rx$ aus Bemerkung 58.(2) gibt nun $x = 0$. Also ist g injektiv.

Bleibt zu zeigen, daß ${}_RI := {}_{\mathbf{Z}}({}_{\mathbf{Z}}R_R\,,\, {}_{\mathbf{Z}}J) = {}_{\mathbf{Z}}(R, J)$ ein injektiver R-Modul ist. Sei $Y' \xrightarrow{j} Y$ eine injektive R-lineare Abbildung zwischen R-Moduln. Loc. cit. gibt uns ein Viereck von R-linearen Abbildungen

$$ \begin{tikzcd} R \underset{R}{\otimes} Y' \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "R\otimes j"'] & Y' \arrow[d, "j"] \\ R \underset{R}{\otimes} Y \arrow[r, "\sim"] & Y \end{tikzcd} . $$

Dieses kommutiert. Also folgt aus der Injektivität von j die Injektivität von $R \otimes j$. Dies gilt auch noch, wenn wir von $R \otimes j$ nur als $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung betrachten, i.e. statt mit ${}_RR_R$ vielmehr mit ${}_{\mathbf{Z}}R_R$ tensorieren.

Lemma 62.(2) gibt uns folgendes kommutative Viereck von R-linearen Abbildungen.

$$ \begin{tikzcd} {}_{\mathbf{Z}}(R \underset{R}{\otimes} Y, J) \arrow[r, "\alpha_{Y,R,J}", "\sim"'] \arrow[d, "{}_{\mathbf{Z}}(R\otimes j,\, J)"'] & {}_R(Y,\, {}_{\mathbf{Z}}(R, J)) \arrow[d, "{}_R(j,\, {}_{\mathbf{Z}}(R,J))"] \\ {}_{\mathbf{Z}}(R \underset{R}{\otimes} Y', J) \arrow[r, "\alpha_{Y',R,J}", "\sim"'] & {}_R(Y',\, {}_{\mathbf{Z}}(R, J)) \end{tikzcd} $$

Wegen der Injektivität von J und der Injektivität von $R \otimes j$ ist darin ${}_{\mathbf{Z}}(R \otimes j,\, J)$ surjektiv. Also ist auch ${}_R(j,\, {}_{\mathbf{Z}}(R, J)) = {}_R(j,\, {}_RI)$ surjektiv. $\square$

Beispiel 69

(1) Es ist $\mathbf{Z} \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/3$ eine surjektive $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung vom projektiven $\mathbf{Z}$-Modul $\mathbf{Z}$. Cf. Bemerkung 64.(3).

(2) Es ist $\mathbf{Z}/3 \longrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, $z + 3\mathbf{Z} \longmapsto \dfrac{z}{3} + \mathbf{Z}$ eine injektive $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung in den injektiven $\mathbf{Z}$-Modul $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. Cf. Lemma 67.

Kapitel 2

Kategorien, Funktoren und Transformationen

2.1 Kategorien

2.1.1 Definition Kategorien

Definition 70 Eine *Kategorie* $\mathcal{C}$ ist ein Tupel

$$(\operatorname{Ob}\mathcal{C}, \operatorname{Mor}\mathcal{C}, \mathsf{Start}, \mathsf{Identität}, \mathsf{Ziel}, \mathsf{Komposition}) \ ,$$

bestehend aus Mengen ([3]) $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$ (*Objekte*), $\operatorname{Mor}\mathcal{C}$ (*Morphismen*), Abbildungen

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Mor}\mathcal{C} \arrow[r, shift left=2, "\mathsf{Start}"] \arrow[r, shift right=2, "\mathsf{Ziel}"'] & \operatorname{Ob}\mathcal{C} \arrow[l, "\mathsf{Identität}"'] \end{tikzcd}$$

und einer Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \{(f,g) \in \operatorname{Mor}\mathcal{C} \times \operatorname{Mor}\mathcal{C} \ : \ f\,\mathsf{Ziel} = g\,\mathsf{Start}\} & \xrightarrow{\mathsf{Komposition}} & \operatorname{Mor}\mathcal{C} \\ (f,g) & \longmapsto & (f,g)\,\mathsf{Komposition} =: f \cdot g = fg \ . \end{array}$$

Ist ein Morphismus $f \in \operatorname{Mor}\mathcal{C}$ mit $f\,\mathsf{Start} = X$ und $f\,\mathsf{Ziel} = Y$ in $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$ gegeben, so schreiben wir auch $X \xrightarrow{f} Y$ oder $f : X \longrightarrow Y$ und sagen, f sei ein Morphismus *von* X *nach* Y in $\mathcal{C}$.

Für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ schreiben wir auch $\mathrm{id}_X = \mathrm{id} = 1_X = 1 := X\,\mathsf{Identität}$.

Folgende Bedingungen sollen gelten.

[3] Wir werden sich an diesen Punkt anschließende mengentheoretische Fragestellungen ignorieren. Wer sich dafür interessiert, schlage unter "Grothendieck universe" nach.

(Kat 1) Für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ ist $X\,\mathsf{Identität\,Start} = X$ und $X\,\mathsf{Identität\,Ziel} = X$.
Kurz, es ist $X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X$.

(Kat 2) Für $X \xrightarrow{f} Y$ in $\operatorname{Mor}\mathcal{C}$ ist $\mathrm{id}_X\, f = f$ und $f\,\mathrm{id}_Y = f$.

(Kat 3) Für $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ in $\operatorname{Mor}\mathcal{C}$ ist $(fg)\,\mathsf{Start} = f\,\mathsf{Start}$ und $(fg)\,\mathsf{Ziel} = g\,\mathsf{Ziel}$.
Kurz, es ist $X \xrightarrow{fg} Z$.

(Kat 4) Für $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$ in $\operatorname{Mor}\mathcal{C}$ ist $f(gh) = (fg)h =: fgh$.

Für gegebene Objekte $X,\, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ schreiben wir

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) = {}_{\mathcal{C}}(X,Y) = (X,Y) := \{f \in \operatorname{Mor}\mathcal{C} \;:\; f\,\mathsf{Start} = X,\; f\,\mathsf{Ziel} = Y\}$$

für die Menge der Morphismen von X nach Y.

Hom wie Homomorphismen, der alte Begriff für Morphismen.

Wir schreiben manchmal auch $(X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z) = (X \xrightarrow{fg} Z)$ für das Kompositum, vorausgesetzt, es ist aus dem Kontext klar, daß komponiert wird.

Man schreibt manchmal auch $(X = X) = (X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X)$ für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$.

Beispiel 71

(1) Die Kategorie (Sets) der Mengen hat als Objekte die Mengen ([3]) und als Morphismen die Abbildungen zwischen Mengen. Sind X und Y Mengen, so bezeichnet also $\operatorname{Hom}_{(\mathrm{Sets})}(X,Y) = {}_{(\mathrm{Sets})}(X,Y)$ die Menge der Abbildungen von X nach Y. Für eine Menge X ist id_X die identische Abbildung auf X. Die Operation Komposition ist die Komposition von Abbildungen, i.e. für Abbildungen $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ bezeichnet $X \xrightarrow{fg} Z$ das Kompositum von f und g.

(2) Die Kategorie (Rings) der Ringe hat als Objekte die Ringe ([3]) und als Morphismen die Ringmorphismen zwischen Ringen. Sind R und S Ringe, so bezeichnet also $\operatorname{Hom}_{(\mathrm{Rings})}(R,S) = {}_{(\mathrm{Rings})}(R,S)$ die Menge der Ringmorphismen von R nach S. Cf. §1.1.1, §1.1.3.

(3) Sei R ein Ring. Die Kategorie R-Mod der R-Linksmoduln hat als Objekte die R-Linksmoduln ([3]) und als Morphismen die R-linearen Abbildungen zwischen R-Linksmoduln. Insbesondere ist für R-Linksmoduln M und N

$$\operatorname{Hom}_{R\text{-Mod}}(M,N) \;=\; \operatorname{Hom}_R(M,N) \;=\; {}_R(M,N)\;,$$

und diese Menge trägt zudem die Struktur einer abelschen Gruppe. Cf. §1.2.1, §1.2.3, §1.2.10.1.

Sei S ein weiterer Ring. Analog haben wir die Kategorie Mod-S der S-Rechtsmoduln und der S-linearen Abbildungen. Ferner haben wir die Kategorie R-Mod-S der R-S-Bimoduln und der R-S-linearen Abbildungen. Cf. §1.2.8.

Bemerkung 72

(1) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Eine *Teilkategorie* $\mathcal{D}$ in $\mathcal{C}$ besteht aus Teilmengen $\operatorname{Ob}\mathcal{D} \subseteq \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ und $\operatorname{Mor}\mathcal{D} \subseteq \operatorname{Mor}\mathcal{C}$ so, daß für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ auch $\mathrm{id}_X \in \operatorname{Mor}\mathcal{D}$ liegt, daß für $X \xrightarrow{f} Y$ in $\operatorname{Mor}\mathcal{D}$ auch $X,\, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ liegen, und daß für $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ in $\operatorname{Mor}\mathcal{D}$ auch $X \xrightarrow{fg} Z$ in $\operatorname{Mor}\mathcal{D}$ liegt. Ferner gehören zu $\mathcal{D}$ die jeweilig eingeschränkten Operationen. Es ist $\mathcal{D}$ wieder eine Kategorie. Schreibe auch $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$.

E.g. gibt es in (Sets) die Teilkategorie, die als Objekte die endlichen Mengen und als Morphismen die injektiven Abbildungen zwischen endlichen Mengen hat.

Die Teilkategorie $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ heißt *voll,* falls ${}_{\mathcal{D}}(X,Y) = {}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ für alle $X,\, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$. Eine volle Teilkategorie ist durch Angabe der Teilmenge $\operatorname{Ob}\mathcal{D} \subseteq \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ festgelegt, da dann $\operatorname{Mor}\mathcal{D} = \{f \in \operatorname{Mor}\mathcal{C} \ : \ f\,\mathsf{Start},\, f\,\mathsf{Ziel} \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}\}$. Umgekehrt definiert jede Teilmenge von $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$ so eine volle Teilkategorie von $\mathcal{C}$.

E.g. gibt es in (Sets) die volle Teilkategorie der Mengen mit Kardinalität in $\{2,5,6\}$ (als Objekte, als Morphismen dann natürlich alle Abbildungen zwischen diesen).

(2) Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}'$ Kategorien. Definiere ihr *direktes Produkt* $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ via $\operatorname{Mor}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}') := \operatorname{Mor}\mathcal{C} \times \operatorname{Mor}\mathcal{C}'$, via $\operatorname{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}') := \operatorname{Ob}\mathcal{C} \times \operatorname{Ob}\mathcal{C}'$, via $(X,X') \xrightarrow{(f,f')} (Y,Y')$ falls $X \xrightarrow{f} Y$ und $X' \xrightarrow{f'} Y'$, via $\mathrm{id}_{(X,X')} = (\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_{X'})$ und via $(f,f')(g,g') = (fg, f'g')$ für $(X,X') \xrightarrow{(f,f')} (Y,Y')$ und $(Y,Y') \xrightarrow{(g,g')} (Z,Z')$. Es ist $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ wieder eine Kategorie.

2.1.2 Die entgegengesetzte Kategorie

Definition 73 Sei $\mathcal{C} = (\operatorname{Ob}\mathcal{C}, \operatorname{Mor}\mathcal{C}, \mathsf{Start}, \mathsf{Identität}, \mathsf{Ziel}, (\cdot))$ eine Kategorie.

Sei $\mathcal{C}^\circ = (\operatorname{Ob}\mathcal{C}, \operatorname{Mor}\mathcal{C}, \mathsf{Ziel}, \mathsf{Identität}, \mathsf{Start}, (\cdot^\circ))$ die zu $\mathcal{C}$ *entgegengesetzte* Kategorie (engl. opposite); wobei also insbesondere ${}_{\mathcal{C}^\circ}(Y,X) = {}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ für $X,\, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C} = \operatorname{Ob}\mathcal{C}^\circ$; und wobei

$$\begin{array}{ccccc} {}_{\mathcal{C}^\circ}(Z,Y) & \times & {}_{\mathcal{C}^\circ}(Y,X) & \xrightarrow{(\cdot^\circ)} & {}_{\mathcal{C}^\circ}(Z,X) \\ (g & , & f) & \longmapsto & g \cdot^\circ f \ := \ f \cdot g \end{array}$$

für $X,\, Y,\, Z \in \operatorname{Ob}\mathcal{C} = \operatorname{Ob}\mathcal{C}^\circ$.

In anderen Worten, es wird

$$(X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z) \qquad = \qquad (X \xrightarrow{\quad f \cdot g \quad} Z)$$

in $\mathcal{C}$ uminterpretiert zu

$$(X \xleftarrow{f} Y \xleftarrow{g} Z) \qquad = \qquad (X \xleftarrow{g \cdot^\circ f \,=\, f \cdot g} Z)$$

in $\mathcal{C}^\circ$. Hierbei deuten die durchgezogenen Pfeile die Interpretation als Morphismus in $\mathcal{C}$, die gepunktelten die Interpretation als Morphismus in $\mathcal{C}^\circ$ an.

Überprüfen wir pars pro toto die Assoziativität, i.e. (Kat 4). Sei ein komponierbares Tripel (h, g, f) in $\mathcal{C}^\circ$ gegeben. Also ist (f, g, h) ein komponierbares Tripel in $\mathcal{C}$. Wir erhalten

$$h \cdot^\circ (g \cdot^\circ f) \;=\; (f \cdot g) \cdot h \;=\; f \cdot (g \cdot h) \;=\; (h \cdot^\circ g) \cdot^\circ f \;.$$

Wir merken noch an, daß $\mathcal{C}^{\circ\circ} = \mathcal{C}$.

Cf. auch Aufgabe 9.

2.1.3 Eigenschaften von Morphismen

Definition 74 Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. In (1-7) seien die Morphismen aus $\mathcal{C}$.

(1) Es heißt $X \xrightarrow{f} Y$ *Isomorphismus,* falls es $X \xleftarrow{g} Y$ mit $fg = \mathrm{id}_X$ und $gf = \mathrm{id}_Y$ gibt. Dies legt g fest, da für $\tilde{g}$ mit $f\tilde{g} = \mathrm{id}_X$ und $\tilde{g}f = \mathrm{id}_Y$ folgt, daß $\tilde{g} = \tilde{g}fg = g$. Schreibe $f^{-1} := g$.

(2) Es heißt $X \xrightarrow{f} Y$ *Retraktion,* falls es $X \xleftarrow{g} Y$ mit $gf = \mathrm{id}_Y$ gibt.

(3) Es heißt $X \xrightarrow{f} Y$ *Coretraktion,* falls es $X \xleftarrow{g} Y$ mit $fg = \mathrm{id}_X$ gibt.

(4) Es heißt $X \xrightarrow{f} Y$ *Epimorphismus* oder *epimorph,* falls für $X \xrightarrow{f} Y \underset{t''}{\overset{t'}{\rightrightarrows}} T$ aus $ft' = ft''$ bereits $t' = t''$ folgt.

(5) Es heißt $X \xrightarrow{f} Y$ *Monomorphismus* oder *monomorph,* falls für $U \underset{u''}{\overset{u'}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{f} Y$ aus $u'f = u''f$ bereits $u' = u''$ folgt.

(6) Es heißt $X \xrightarrow{f} Y$ *Endomorphismus,* falls $X = Y$.

(7) Es heißt $X \xrightarrow{f} Y$ *Automorphismus,* falls $X = Y$ und f ein Isomorphismus ist.

Isomorphismen werden auch $\xrightarrow{\sim}$ geschrieben, Monomorphismen $\rightarrowtail$ und Epimorphismen $\twoheadrightarrow$. Schreibe noch $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ für $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$.

Beispiel 75 Sei $\mathcal{C} = \mathbf{Z}$-Mod. Unter den 8 Endomorphismen von $\mathbf{Z}/8$ sind 1, 3, -3 und -1 Automorphismen. Es ist $\mathbf{Z}/4 \xrightarrow{(3\,4)} \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8$ eine Coretraktion. Es ist $\mathbf{Z}/8 \xrightarrow{3} \mathbf{Z}/4$ surjektiv, aber keine Retraktion.

Bemerkung 76 *Sei R ein Ring. Sei ${}_RM \xrightarrow{f} {}_RN$ eine R-lineare Abbildung, i.e. ein Morphismus in R-*Mod.

(1) *Es ist f genau dann injektiv, wenn f monomorph ist.*

(2) *Es ist f genau dann surjektiv, wenn f epimorph ist.*

Beweis.

Zu (1).

Sei f injektiv. Seien $_RU \underset{u''}{\overset{u'}{\rightrightarrows}} {}_RM$ zwei R-lineare Abbildungen mit $u'f = u''f$. Sei $x \in U$. Es ist $xu'f = xu''f$. Die Injektivität von f gibt $xu' = xu''$. Dies zeigt, daß $u' = u''$. Also ist f monomorph.

Sei umgekehrt f monomorph. Wir haben von Kern f nach M die R-linearen Abbildungen ι und 0. Es ist $\iota f = 0 = 0f$. Also ist $\iota = 0$, mithin Kern $f = 0$ und also f injektiv.

Zu (2).

Sei f surjektiv. Seien $_RN \underset{t''}{\overset{t'}{\rightrightarrows}} {}_RT$ zwei R-lineare Abbildungen mit $ft' = ft''$. Sei $n \in N$. Schreibe $n = mf$ für ein $m \in M$. Es wird $nt' = mft' = mft'' = nt''$. Dies zeigt, daß $t' = t''$. Also ist f epimorph.

Sei umgekehrt f epimorph. Wir haben von N nach Cokern f die R-linearen Abbildungen ρ und 0. Es ist $f\rho = 0 = f0$. Also ist $\rho = 0$, mithin Cokern $f = 0$ und also f surjektiv. ▫

Bemerkung 77 Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie.

Man kann Begriffe für Kategorien *dualisieren.* Ein Begriff, angewandt auf $\mathcal{C}^\circ$, liefert den dualen Begriff in $\mathcal{C}$. Dito für Aussagen in Kategorien, etc. Der Wahrheitsgehalt einer Aussage ändert sich beim Dualisieren nicht.

Stimmt ein Begriff mit seinem dualen Begriff überein, so heißt er *selbstdual.* Dito für Aussagen.

Beispiele.

(1) Ein Morphismus ist in $\mathcal{C}^\circ$ monomorph genau dann, wenn er in $\mathcal{C}$ epimorph ist. Somit ist der Begriff des Epimorphismus dual zu dem des Monomorphismus.

(2) Das Kompositum zweier Monomorphismen ist monomorph. Wendet man diese Aussage auf $\mathcal{C}^\circ$ an, so erhält man in $\mathcal{C}$ die Aussage, daß das Kompositum zweier Epimorphismen wieder epimorph ist. Letztere Aussage ist also dual zur ersteren.

(3) Der Begriff des Isomorphismus ist selbstdual. Die Aussage, daß das Kompositum zweier Isomorphismen wieder ein Isomorphismus ist, auch.

2.1.4 Eigenschaften von Objekten

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie.

Definition 78 Objekte $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ heißen *isomorph,* geschrieben $X \simeq Y$, falls es einen Isomorphismus $X \xrightarrow{\sim} Y$ gibt. Isomorphie ist eine Äquivalenzrelation auf $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$. Die Äquivalenzklasse von $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ heißt *Iso(morphie)klasse* von X, geschrieben $[X] := \{Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C} \,:\, Y \simeq X\}$.

In der Kategorie der Linksmoduln über einem Ring stimmt dieser Isomorphiebegriff mit dem bisherigen überein; cf. Definition 27, Aufgabe 8.(2).

Dito in der Kategorie der Ringe; cf. Definition 11, Aufgabe 8.(1).

Definition 79 Sei $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$.

(1) Es heißt X *initial,* falls $|\,_{\mathcal{C}}(X,T)| = 1$ für alle $T \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$.

(2) Es heißt X *terminal,* falls $|\,_{\mathcal{C}}(T,X)| = 1$ für alle $T \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$.

(3) Es heißt X *Nullobjekt,* falls X initial und terminal ist.

Beispiel 80

(1) In (Sets) ist die leere Menge initial. Jede einelementige Menge ist terminal.

(2) Sei R ein Ring. In R-Mod ist der Nullmodul 0 ein Nullobjekt.

(3) In (Rings) ist $\mathbf{Z}$ initial, der Nullring ist terminal. Cf. Beispiel 15.

Bemerkung 81 *Seien $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$.*

(1) *Sind X und Y initial, so gibt es genau einen Isomorphismus von X nach Y.*

(2) *Sind X und Y terminal, so gibt es genau einen Isomorphismus von X nach Y.*

(3) *Sind X und Y Nullobjekte, so gibt es genau einen Isomorphismus von X nach Y.*

Beweis. Zu (1). Es gibt jeweils genau einen Morphismus $X \xrightarrow{f} Y$ und $X \xleftarrow{g} Y$. Nun ist $fg = \mathrm{id}_X$, da auch $|\,_{\mathcal{C}}(X,X)| = 1$. Genauso ist $gf = \mathrm{id}_Y$. □

Bemerkung 82 *Existiere ein Nullobjekt 0 in $\mathcal{C}$. Sei $(X \xrightarrow{0 = 0_{X,Y}} Y) := (X \longrightarrow 0 \longrightarrow Y)$ für $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, genannt der* Nullmorphismus *von X nach Y. Für $X' \xrightarrow{f} X$ und $Y \xrightarrow{g} Y'$ ist $f\,0_{X,Y}\,g = 0_{X',Y'}$; kurz, $f0g = 0$. Der Nullmorphismus hängt nicht von der Wahl des Nullobjekts ab.*

Cf. Bemerkung 25.(1).

Beweis. Zeigen wir die Unabhängigkeit von der Wahl des Nullobjekts. Seien 0 und $0'$ Nullobjekte. Es kommutiert

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[dr] \arrow[d, "\wr"] & \\ X \arrow[ur] \arrow[dr] & & Y \\ & 0' \arrow[ur] & \end{tikzcd} .$$

□

2.2 Funktoren

Funktoren werden wir auf die traditionelle Art links schreiben, da sich die Zahl der zu komponierenden Funktoren in Grenzen halten wird.

Seien $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ und $\mathcal{E}$ Kategorien.

Definition 83 Ein *Funktor* $F = (\operatorname{Ob} F, \operatorname{Mor} F)$ von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ besteht aus Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Ob}\mathcal{C} & \xrightarrow{\operatorname{Ob} F} & \operatorname{Ob}\mathcal{D} \\ \operatorname{Mor}\mathcal{C} & \xrightarrow{\operatorname{Mor} F} & \operatorname{Mor}\mathcal{D}\,, \end{array}$$

welche wir links notieren, und für welche folgende Eigenschaften gelten.

(Fun 1) Es kommutieren folgende Vierecke.

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Mor}\mathcal{C} \arrow[r, "\operatorname{Mor} F"] \arrow[d, "\mathsf{Start}"'] & \operatorname{Mor}\mathcal{D} \arrow[d, "\mathsf{Start}"] \\ \operatorname{Ob}\mathcal{C} \arrow[r, "\operatorname{Ob} F"'] & \operatorname{Ob}\mathcal{D} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \operatorname{Mor}\mathcal{C} \arrow[r, "\operatorname{Mor} F"] \arrow[d, "\mathsf{Ziel}"'] & \operatorname{Mor}\mathcal{D} \arrow[d, "\mathsf{Ziel}"] \\ \operatorname{Ob}\mathcal{C} \arrow[r, "\operatorname{Ob} F"'] & \operatorname{Ob}\mathcal{D} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \operatorname{Mor}\mathcal{C} \arrow[r, "\operatorname{Mor} F"] & \operatorname{Mor}\mathcal{D} \\ \operatorname{Ob}\mathcal{C} \arrow[r, "\operatorname{Ob} F"'] \arrow[u, "\mathsf{Identität}"] & \operatorname{Ob}\mathcal{D} \arrow[u, "\mathsf{Identität}"'] \end{tikzcd}$$

(Fun 2) Für $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ in $\mathcal{C}$ ist $(\operatorname{Mor} F)(f \cdot g) = (\operatorname{Mor} F)(f) \cdot (\operatorname{Mor} F)(g)$.

Ein Funktor F ist durch die Angabe von $\operatorname{Mor} F$ festgelegt, da $(\operatorname{Ob} F)(X) = (\operatorname{Ob} F)((\mathrm{id}_X)\,\mathsf{Start}) = ((\operatorname{Mor} F)(\mathrm{id}_X))\,\mathsf{Start}$ für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$.

Wir schreiben in der Regel $(\operatorname{Ob} F)(X) =: FX$ für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ und $(\operatorname{Mor} F)(f) =: Ff$ für $f \in \operatorname{Mor}\mathcal{C}$.

Wir schreiben auch $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ oder $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ für einen Funktor von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$.

Es bedeutet (Fun 1) zum einen, daß $F(X \xrightarrow{f} Y) = FX \xrightarrow{Ff} FY$ für $f \in \operatorname{Mor}\mathcal{C}$, und zum anderen, daß $F\,\mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{FX}$ für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$. Es besagt (Fun 2), daß $F(fg) = (Ff)(Fg)$ für $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ in $\mathcal{C}$.

Ein *kontravarianter Funktor* von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ ist ein Funktor von $\mathcal{C}^\circ$ nach $\mathcal{D}$. Ein solcher kann auch als Funktor von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}^\circ$ aufgefaßt werden.

Bemerkung 84

(1) *Es gibt den identischen Funktor* $\mathrm{id}_\mathcal{C} = \mathrm{id}$ *auf* $\mathcal{C}$*, für welchen* $\operatorname{Ob}\mathrm{id}_\mathcal{C} = \mathrm{id}_{\operatorname{Ob}\mathcal{C}}$ *und* $\operatorname{Mor}\mathrm{id}_\mathcal{C} = \mathrm{id}_{\operatorname{Mor}\mathcal{C}}$.

(2) *Seien Funktoren* $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E}$ *gegeben. Sei* $G \circ F$ *durch* $\operatorname{Ob}(G \circ F) = (\operatorname{Ob} G) \circ (\operatorname{Ob} F)$ *und* $\operatorname{Mor}(G \circ F) = (\operatorname{Mor} G) \circ (\operatorname{Mor} F)$ *definiert. Es ist das* Kompositum $G \circ F$ *von* G *nach* F *ein Funktor von* $\mathcal{C}$ *nach* $\mathcal{E}$*. Kurz,* $(\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E}) = (\mathcal{C} \xrightarrow{G \circ F} \mathcal{E})$.

(3) *Ist f ein Isomorphismus, so auch Ff. Es ist $F(f^{-1}) = (Ff)^{-1}$.*

Beweis. Zu (3). Es ist $Ff \cdot F(f^{-1}) = F(f \cdot f^{-1}) = F\,\mathrm{id} = \mathrm{id}$ und $F(f^{-1}) \cdot Ff = F(f^{-1} \cdot f) = F\,\mathrm{id} = \mathrm{id}$. □

Beispiel 85 Seien R, S und T Ringe. Sei ${}_RM_S$ ein R-S-Bimodul. Die folgenden Beispiele beruhen auf den Bemerkungen 51 und 59.

(1) Wir haben den Funktor

$$\begin{array}{rcccl} {}_R({}_RM_S\,,\,-) & : & R\text{-Mod} & \longrightarrow & S\text{-Mod} \\ & & g & \longmapsto & {}_R({}_RM_S\,,\,g) = \mathrm{Hom}_R({}_RM_S\,,\,g)\ . \end{array}$$

(2) Wir haben den Funktor

$$\begin{array}{rcccccl} {}_R(-,=) & : & (R\text{-Mod-}S)^\circ & \times & R\text{-Mod-}T & \longrightarrow & S\text{-Mod-}T \\ & & (f & , & g) & \longmapsto & {}_R(f,g) = \mathrm{Hom}_R(f,g)\ . \end{array}$$

Cf. auch Beispiel 86.

(3) Wir haben den Funktor

$$\begin{array}{rcccl} {}_RM_S \underset{S}{\otimes} - & : & S\text{-Mod} & \longrightarrow & R\text{-Mod} \\ & & g & \longmapsto & {}_RM_S \underset{S}{\otimes} g\ . \end{array}$$

(4) Wir haben den Funktor

$$\begin{array}{rcccccl} - \underset{S}{\otimes} = & : & R\text{-Mod-}S & \times & S\text{-Mod-}T & \longrightarrow & R\text{-Mod-}T \\ & & (f & , & g) & \longmapsto & f \underset{S}{\otimes} g\ . \end{array}$$

Verallgemeinern wir Beispiel 85.(2, 1) ein wenig.

Beispiel 86 Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Wir haben den *Homfunktor*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\circ \times \mathcal{C} & \xrightarrow{\mathcal{C}(-,=)} & (\mathrm{Sets}) \\ \left(\begin{array}{c} (X,Y) \\ {\scriptstyle (u,v)}\downarrow \\ (X',Y') \end{array}\right) & \longmapsto & \left(\begin{array}{cc} \mathcal{C}(X,Y) & f \\ {\scriptstyle \mathcal{C}(u,v)}\downarrow & \downarrow \\ \mathcal{C}(X',Y') & ufv \end{array}\right) \end{array}$$

Beachte, daß $X \xleftarrow{u} X'$ und $Y \xrightarrow{v} Y'$ in $\mathcal{C}$.

Davon können wir folgende Funktoren ableiten.

Für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ wird $\mathcal{C} \xrightarrow{c(X,-)} (\mathrm{Sets})$, $(Y \xrightarrow{v} Y') \longmapsto \big({}_{\mathcal{C}}(X,Y) \xrightarrow{c(X,v)} {}_{\mathcal{C}}(X,Y'),\ f \longmapsto fv\big)$.

Für $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ wird $\mathcal{C}^\circ \xrightarrow{c(-,Y)} (\mathrm{Sets})$, $(X \xleftarrow{u} X') \longmapsto \big({}_{\mathcal{C}}(X,Y) \xrightarrow{c(u,Y)} {}_{\mathcal{C}}(X',Y),\ f \longmapsto uf\big)$.

Hierbei läuft $X \xleftarrow{u} X'$ in $\mathcal{C}$ von X' nach X, i.e. in $\mathcal{C}^\circ$ von X nach X'.

Cf. Bemerkung 51.

Beispiel 87 Sei $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ ein Funktor. Habe $\mathcal{C}$ ein Nullobjekt 0. Sei $F0 \simeq 0$. Es ist $F(0_{X,Y}) = 0_{FX,FY}$ für $X,\ Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$.

Definition 88 Sei $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ ein Funktor.

(1) Es heißt F *voll,* wenn die Abbildung ${}_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow {}_{\mathcal{D}}(FX,FY)$, $f \longmapsto Ff$ surjektiv ist für alle $X,\ Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$.

(2) Es heißt F *treu,* wenn die Abbildung ${}_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow {}_{\mathcal{D}}(FX,FY)$, $f \longmapsto Ff$ injektiv ist für alle $X,\ Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$.

(3) Es heißt F *dicht,* wenn für alle $Z \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ ein $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ mit $FX \simeq Z$ existiert.

(4) Es heißt F *strikt dicht,* wenn für alle $Z \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ ein $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ mit $FX = Z$ existiert.

Beispiel 89

(1) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Sei $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ eine Teilkategorie. Wir haben diesenfalls einen treuen Inklusionsfunktor $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{C}$, der jeden Morphismus und jedes Objekt von $\mathcal{D}$ auf sich selbst schickt, gesehen in $\mathcal{C}$. Dieser Inklusionsfunktor ist voll genau dann, wenn $\mathcal{D}$ eine volle Teilkategorie von $\mathcal{C}$ ist.

(2) Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}'$ Kategorien. Wir haben Projektionsfunktoren $\mathcal{C} \times \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$, $(f,f') \longmapsto f$ und $\mathcal{C} \times \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}'$, $(f,f') \longmapsto f'$. Falls $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}'$ je ein Nullobjekt enthalten, sind diese Projektionsfunktoren voll und strikt dicht.

Bemerkung 90 *Sei $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ ein voller und treuer Funktor. Sei $(X \xrightarrow{f} Y) \in \operatorname{Mor}\mathcal{C}$. Es ist f ein Isomorphismus genau dann, wenn Ff ein Isomorphismus ist. Insbesondere ist $X \simeq Y$ genau dann, wenn $FX \simeq FY$.*

Beweis. Ist f ein Isomorphismus, so auch Ff; cf. Bemerkung 84.(3).

Sei umgekehrt Ff ein Isomorphismus. Sei $X \xleftarrow{g} Y$ in $\mathcal{C}$ ein Morphismus, für welchen $Fg = (Ff)^{-1}$, existent wegen F voll. Es wird $F(fg) = (Ff)(Fg) = (Ff)(Ff)^{-1} = \mathrm{id}_{FX} = F\,\mathrm{id}_X$, wegen F treu also $fg = \mathrm{id}_X$. Genauso wird $gf = \mathrm{id}_Y$.

Insbesondere folgt aus $X \simeq Y$, daß $FX \simeq FY$; und umgekehrt, aus $FX \simeq FY$, daß $X \simeq Y$, denn für einen Isomorphismus $FX \xrightarrow[\sim]{h} FY$ gibt es ein Urbild $X \xrightarrow{f} Y$ mit $Ff = h$, und wie eben gesehen ist f ein Isomorphismus. $\square$

2.3 Transformationen

Seien Funktoren $\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}} \mathcal{D}$ zwischen Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ gegeben.

Definition 91 Ein Tupel $a = (FX \xrightarrow{aX} GX)_{X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}}$ von Morphismen in $\mathcal{D}$ heißt *natürlich* (in $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$) oder eine *Transformation* von F nach G, falls das Viereck

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "aX"] \arrow[d, "Ff"'] & GX \arrow[d, "Gf"] \\ FY \arrow[r, "aY"] & GY \end{tikzcd}$$

kommutiert für alle Morphismen $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathcal{C}$. Wir schreiben auch $\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\Downarrow a}} \mathcal{D}$ oder $F \xrightarrow{a} G$.

Die identische Transformation auf F wird $\mathrm{id} = \mathrm{id}_F = 1 = 1_F := (\mathrm{id}_{FX})_{X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}}$ geschrieben.

Sind F, G und H Funktoren von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$, und sind $F \xrightarrow{a} G \xrightarrow{b} H$ Transformationen, so ist $ab := \big((aX)(bX)\big)_{X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}}$ eine Transformation von F nach H.

Insgesamt erhalten wir so die *Funktorkategorie* $[\![\mathcal{C}, \mathcal{D}]\!]$, welche als Objekte die Funktoren von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ enthält, und als Morphismen die Transformationen zwischen solchen Funktoren.

Eine Transformation, welche in $[\![\mathcal{C}, \mathcal{D}]\!]$ ein Isomorphismus ist, heißt auch *Isotransformation.*

Bemerkung 92 *Eine Transformation $F \xrightarrow{a} G$ ist genau dann eine Isotransformation, wenn aX ein Isomorphismus ist für alle $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$.*

Beweis. Ist a eine Isotransformation, so gibt es eine Transformation $F \xleftarrow{b} G$ mit $ab = \mathrm{id}$ und $ba = \mathrm{id}$. Für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ ist $(aX)(bX) = \mathrm{id}$ und $(bX)(aX) = \mathrm{id}$, und also aX ein Isomorphismus.

Für die umgekehrte Implikation ist die Natürlichkeit von $((aX)^{-1})_{X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}}$ zu zeigen. Sei $(X \xrightarrow{f} Y) \in \operatorname{Mor}\mathcal{C}$. Es wird

$$(aX)^{-1}(Ff) \;=\; (aX)^{-1}(Ff)(aY)(aY)^{-1} \;=\; (aX)^{-1}(aX)(Gf)(aY)^{-1} \;=\; (Gf)(aY)^{-1}\,.$$

□

Beispiel 93 Seien R und S Ringe.

(1) Sei ${}_RM_S$ gegeben. Das Tupel mit dem Eintrag

$$\begin{array}{rcl} {}_RX & \xrightarrow{eX} & {}_S({}_R({}_RX,\, {}_RM_S),\, {}_RM_S) \\ x & \longmapsto & (f \longmapsto xf) \end{array}$$

bei $X \in \operatorname{Ob} R\text{-Mod}$ ist eine Transformation von $\mathrm{id}_{R\text{-Mod}}$ nach ${}_S({}_R(-,\, {}_RM_S),\, {}_RM_S)$. Zeigen wir die Natürlichkeit. Sei ${}_RX \xrightarrow{u} {}_RY$ eine R-lineare Abbildung. Wir erhalten das Viereck

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "eX"] \arrow[d, "u"'] & {}_S({}_R(X,\, {}_RM_S),\, {}_RM_S) \arrow[d, "{}_S({}_R(u,\, {}_RM_S),\, {}_RM_S)"] \\ Y \arrow[r, "eY"] & {}_S({}_R(Y,\, {}_RM_S),\, {}_RM_S)\ . \end{tikzcd}$$

Für $x \in X$ wird einerseits

$$\begin{aligned} x(eX)\, {}_S({}_R(u,\, {}_RM_S),\, {}_RM_S) &= (f \longmapsto xf)\, {}_S({}_R(u,\, {}_RM_S),\, {}_RM_S) \\ &= {}_R(u,\, {}_RM_S)(f \longmapsto xf) \\ &= (g \longmapsto ug)(f \longmapsto xf) \\ &= (g \longmapsto xug)\ , \end{aligned}$$

andererseits

$$xu(eY) \;=\; (g \longmapsto xug)\ .$$

Also kommutiert dieses Viereck.

Ist $R = S = K$ ein Körper, ist ${}_RM_S = {}_KK_K$ und schränkt man noch auf die volle Teilkategorie der endlichdimensionalen Vektorräume ein, so erhält man eine Isotransformation. (Isomorphismus in den Doppeltdualen.)

(2) In Lemma 62 haben wir zwei Funktoren von $(S\text{-Mod})^\circ \times (R\text{-Mod-}S)^\circ \times R\text{-Mod}$ nach $\mathbf{Z}$-Mod betrachtet, der eine schickte ein Tripel $({}_SX\,,\, {}_RM_S\,,\, {}_RN)$ nach ${}_R({}_RM_S \underset{S}{\otimes} {}_SX,\, {}_RN)$, der andere nach ${}_S({}_SX,\, {}_R({}_RM_S\,,\, {}_RN))$; die Morphismen entsprechend.

Sodann haben wir eine Isotransformation $\alpha = (\alpha(X,M,N))_{(X,M,N)} := (\alpha_{X,M,N})_{(X,M,N)}$ vom ersteren in den zweiteren konstruiert; in loc. cit. (2), i.e. in Aufgabe 26, wurde ihre Natürlichkeit nachgewiesen.

Beispiel 94 Betrachte zur teilgeordneten Menge $\mathbf{Z}$ die Kategorie $\mathbf{Z}^{\mathrm{k}}$; cf. Aufgabe 37. Sei $\mathcal{D}$ eine Kategorie mit Nullobjekt.

Sei $X \in \operatorname{Ob} [\![\mathbf{Z}^{\mathrm{k}}, \mathcal{D}]\!]$. Schreibe $Xi =: X^i$ für $i \in \operatorname{Ob} \mathbf{Z}^{\mathrm{k}} = \mathbf{Z}$. Von einem Objekt in $[\![\mathbf{Z}^{\mathrm{k}}, \mathcal{D}]\!]$ werden ohne Verlust an Information nur die Bilder d_X^i der Morphismen $i \longrightarrow i+1$ für $i \in \mathbf{Z}$ graphisch dargestellt, i.e.

$$X \;=\; (\cdots \longrightarrow X^i \xrightarrow{d_X^i} X^{i+1} \xrightarrow{d_X^{i+1}} X^{i+2} \longrightarrow \cdots)$$

Oft schreibt man auch nur $d = d^i := d_X^i$ für $i \in \mathbf{Z}$.

Umgekehrt definiert jede Wahl von Objekten X^i und von Morphismen $d_X^i : X^i \longrightarrow X^{i+1}$ für $i \in \mathbf{Z}$ ein $X \in \operatorname{Ob} [\![\mathbf{Z}^{\mathrm{k}}, \mathcal{D}]\!]$.

Seien $X,\, Y \in \operatorname{Ob} [\![\mathbf{Z}^{\mathrm{k}}, \mathcal{D}]\!]$. Die Natürlichkeitsbedingung an ein Tupel $f = (X^i \xrightarrow{f^i} Y^i)_{i \in \mathbf{Z}}$ läßt sich auf die Forderung $d_X^i f^{i+1} = f^i d_Y^i$ für $i \in \mathbf{Z}$ reduzieren. In anderen Worten, ein

Morphismus $X \xrightarrow{f} Y$ ist ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X^i \arrow[r, "d_X^i"] \arrow[d, "f^i"] & X^{i+1} \arrow[r, "d_X^{i+1}"] \arrow[d, "f^{i+1}"] & X^{i+2} \arrow[r] \arrow[d, "f^{i+2}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y^i \arrow[r, "d_Y^i"] & Y^{i+1} \arrow[r, "d_Y^{i+1}"] & Y^{i+2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Ein *Komplex* mit Werten in $\mathcal{D}$ ist ein Objekt X in $[\![\mathbf{Z}^{\mathrm{k}}, \mathcal{D}]\!]$, für welches $i \longrightarrow i+2$ für alle $i \in \mathbf{Z}$ auf den Nullmorphismus abgebildet wird, i.e. für welches $(X^i \xrightarrow{d_X^i} X^{i+1} \xrightarrow{d_X^{i+1}} X^{i+2}) = (X^i \xrightarrow{0} X^{i+2})$ für alle $i \in \mathbf{Z}$. Die volle Teilkategorie der Komplexe in $[\![\mathbf{Z}^{\mathrm{k}}, \mathcal{D}]\!]$ wird $\mathrm{C}(\mathcal{D})$ geschrieben. Die Morphismen d_X^i heißen auch die *Differentiale* des Komplexes X.

2.4 Äquivalenz von Kategorien

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien.

Definition 95 Ein Funktor $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ heißt *Äquivalenz,* wenn es einen Funktor $\mathcal{C} \xleftarrow{G} \mathcal{D}$ so gibt, daß $G \circ F \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ und $F \circ G \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$.

Existiert eine Äquivalenz von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$, so heißen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ *äquivalent,* geschrieben $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[d, bend right, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}}"'] \arrow[d, bend left, "G\circ F"] \arrow[d, phantom, "\overset{\sim}{\Longleftarrow}"] & & \mathcal{D} \arrow[d, bend right, "F\circ G"'] \arrow[d, bend left, "\mathrm{id}_{\mathcal{D}}"] \arrow[d, phantom, "\overset{\sim}{\Longrightarrow}"] \\
\mathcal{C} & & \mathcal{D} \arrow[ll, "G"]
\end{tikzcd}$$

Lemma 96 *Sei $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ ein Funktor.*

(1) *Es ist F eine Äquivalenz genau dann, wenn F voll, treu und dicht ist.*

(2) *Es gibt einen Funktor $\mathcal{C} \xleftarrow{G} \mathcal{D}$ mit $G \circ F \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ und $F \circ G = \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ genau dann, wenn F voll, treu und strikt dicht ist.*

Beweis. Wir zeigen (1) (und erwähnen die Zusatzeigenschaften aus (2) an den entsprechenden Stellen).

Sei zum einen F eine Äquivalenz. Wähle Isomorphismen $F \circ G \xrightarrow[\sim]{\alpha} \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ und $G \circ F \xrightarrow[\sim]{\beta} \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$.

Zeigen wir, daß F dicht ist. Sei $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$. Es ist $GY \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ und $FGY \xrightarrow[\sim]{\alpha Y} Y$. (Ist sogar $F \circ G = \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$, dann ist $FGY = Y$, und somit F strikt dicht.)

Zeigen wir, daß F treu ist. Seien $X, X' \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$. Wir haben zu zeigen, daß ${}_{\mathcal{C}}(X, X') \longrightarrow {}_{\mathcal{D}}(FX, FX')$, $u \longmapsto Fu$ injektiv ist. Dies folgt aus $u = (\beta X)^{-1}(GFu)(\beta X')$.

Genauso ist auch G treu.

Zeigen wir, daß F voll ist. Seien $X, X' \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$. Wir haben zu zeigen, daß ${}_{\mathcal{C}}(X, X') \longrightarrow {}_{\mathcal{D}}(FX, FX')$, $u \longmapsto Fu$ surjektiv ist. Sei $v \in {}_{\mathcal{D}}(FX, FX')$ gegeben. Es wird

$$Gv \;=\; (\beta X)\big((\beta X)^{-1}(Gv)(\beta X')\big)(\beta X')^{-1} \;=\; GF\big((\beta X)^{-1}(Gv)(\beta X')\big)\;,$$

wegen G treu also

$$v \;=\; F\big((\beta X)^{-1}(Gv)(\beta X')\big)\;.$$

Sei zum anderen F voll, treu und dicht. Vermittels Auswahlaxiom wählen wir für jedes $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ ein $X_Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ und einen Isomorphismus $FX_Y \xrightarrow[\sim]{\vartheta_Y} Y$. (Ist F sogar strikt dicht, so wählen wir X_Y so, daß $FX_Y = Y$, und $\vartheta_Y := \mathrm{id}_Y$.)

Wir konstruieren einen Funktor $\mathcal{C} \xleftarrow{G} \mathcal{D}$. Für $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ setzen wir $GY := X_Y$. Für einen Morphismus $Y \xrightarrow{v} Y'$ in $\mathcal{D}$ wählen wir $GY \xrightarrow{Gv} GY'$ so, daß

$$(FGY \xrightarrow{FGv} FGY') \;=\; (FGY \xrightarrow[\sim]{\vartheta_Y} Y \xrightarrow{v} Y' \xrightarrow[\sim]{\vartheta_{Y'}^{-1}} FGY')\;.$$

Dies ist auf eindeutige Weise möglich, da F voll und treu ist. Für $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ wird

$$(FGY \xrightarrow{FG\,\mathrm{id}_Y} FGY) \;\overset{\text{def}}{=}\; (FGY \xrightarrow[\sim]{\vartheta_Y} Y \xrightarrow{\mathrm{id}_Y} Y \xrightarrow[\sim]{\vartheta_Y^{-1}} FGY) \;=\; (FGY \xrightarrow{F\,\mathrm{id}_{GY}} FGY)\;,$$

mithin $G\,\mathrm{id}_Y = \mathrm{id}_{GY}$. Für $Y \xrightarrow{v} Y' \xrightarrow{v'} Y''$ in $\mathcal{D}$ wird

$$\begin{aligned}
& (FGY \xrightarrow{FG(vv')} FGY'') \\
\overset{\text{def}}{=}\; & (FGY \xrightarrow[\sim]{\vartheta_Y} Y \xrightarrow{vv'} Y'' \xrightarrow[\sim]{\vartheta_{Y''}^{-1}} FGY'') \\
=\; & (FGY \xrightarrow[\sim]{\vartheta_Y} Y \xrightarrow{v} Y' \xrightarrow[\sim]{\vartheta_{Y'}^{-1}} FGY' \xrightarrow[\sim]{\vartheta_{Y'}} Y' \xrightarrow{v'} Y'' \xrightarrow[\sim]{\vartheta_{Y''}^{-1}} FGY'') \\
\overset{\text{def}}{=}\; & (FGY \xrightarrow{FGv} FGY' \xrightarrow{FGv'} FGY'') \\
=\; & (FGY \xrightarrow{F((Gv)(Gv'))} FGY'')\;,
\end{aligned}$$

mithin $G(vv') = (Gv)(Gv')$. Somit ist nachgewiesen, daß G ein Funktor ist.

Setze $\alpha = (FGY \xrightarrow[\sim]{\alpha Y} Y)_{Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}} := (FGY \xrightarrow[\sim]{\vartheta_Y} Y)_{Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}}$. Für $Y \xrightarrow{v} Y'$ in $\mathcal{D}$ ist in der Tat $(FGv)(\alpha Y') = (\alpha Y)v$, da nach Definition von Gv ja $(FGv)\vartheta_{Y'} = \vartheta_Y v$ gilt. Somit ist $F \circ G \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ nachgewiesen. (Ist F sogar strikt dicht, so war stets $\vartheta_Y = \mathrm{id}_Y$ gewählt, was hier zu $F \circ G = \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ führt.)

Wähle $\beta = (GFX \xrightarrow{\beta X} X)_{X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}}$ so, daß $F\beta_X = \vartheta_{FX}$ für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, was wegen F voll und treu auf eindeutige Weise möglich ist. Es ist βX stets ein Isomorphismus; cf. Bemerkung 90. Zu zeigen bleibt die Natürlichkeit von β; cf. Bemerkung 92. Sei $X \xrightarrow{u} X'$ in $\mathcal{C}$. Es wird

$$\begin{aligned}
F\big((GFu)(\beta X')\big) \;&=\; (FGFu)\vartheta_{FX'} \\
&=\; \vartheta_{FX}(Fu) \\
&=\; F\big((\beta X)u)\big)\;,
\end{aligned}$$

und also $(GFu)(\beta X') = (\beta X)u$, da F treu ist. Somit ist $G \circ F \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ nachgewiesen.

Kapitel 3

Additive Kategorien und additive Funktoren

3.1 Additive Kategorien

Sei $\mathcal{A}$ eine Kategorie, welche ein Nullobjekt $0 = 0_{\mathcal{A}}$ besitzt. Im folgenden seien alle Morphismen aus $\mathcal{A}$.

Definition 97 Sei $m \geqslant 0$. Seien $X_1, \ldots, X_m \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Eine *direkte Summe* von $(X_1, \ldots, X_m)$ ist ein Objekt $\bigoplus_{i\in[1,m]} X_i = X_1 \oplus \cdots \oplus X_m$, zusammen mit *Inklusionsmorphismen* $X_j \xrightarrow{\iota_j} \bigoplus_{i\in[1,m]} X_i$ und *Projektionsmorphismen* $\bigoplus_{i\in[1,m]} X_i \xrightarrow{\pi_j} X_j$ für $j \in [1,m]$ so, daß folgende Axiome gelten.

(Sum 1) Für jedes $S \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ und jedes Tupel von Morphismen $(S \xrightarrow{s_i} X_i)_{i\in[1,m]}$ gibt es genau einen Morphismus $S \xrightarrow{s} \bigoplus_{i\in[1,m]} X_i$ mit $s\pi_i = s_i$ für $i \in [1,m]$. Wir schreiben auch $s = \begin{pmatrix} s_1 \ldots s_m \end{pmatrix}$.

(Sum 2) Für jedes $T \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ und jedes Tupel von Morphismen $(X_i \xrightarrow{t_i} T)_{i\in[1,m]}$ gibt es genau einen Morphismus $\bigoplus_{i\in[1,m]} X_i \xrightarrow{t} T$ mit $\iota_i t = t_i$ für $i \in [1,m]$. Wir schreiben auch $t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_m \end{pmatrix}$.

(Sum 3) Es ist $\iota_i\pi_i = \mathrm{id}_{X_i} = 1$ für alle $i \in [1,m]$.
Es ist $\iota_i\pi_j = 0_{X_i, X_j} = 0$ für alle $i, j \in [1,m]$ mit $i \neq j$.

Bemerkung 98 Seien $m, n \geqslant 0$. Seien $X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Seien direkte Summen von $(X_1, \ldots, X_m)$ und $(Y_1, \ldots, Y_n)$ existent.

(1) Sei $j \in [1,m]$.

Es ist $\iota_j = \left(\begin{smallmatrix} 0 \dots 0 \, 1 \, 0 \dots 0 \end{smallmatrix}\right) : X_j \longrightarrow \bigoplus_{i\in[1,m]} X_i$ mit der 1 an Position j, wie sich aus (Sum 1, 3) ergibt.

Es ist $\pi_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} : \bigoplus_{i\in[1,m]} X_i \longrightarrow X_j$ mit der 1 an Position j, wie sich aus (Sum 2, 3) ergibt.

(2) Seien $X_i \xrightarrow{f_{i,j}} Y_j$ gegeben für $i \in [1,m]$ und $j \in [1,n]$. Es gibt genau einen Morphismus

$$\bigoplus_{i\in[1,m]} X_i \xrightarrow{(f_{i,j})_{i,j} = \begin{pmatrix} f_{1,1} & \dots & f_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{m,1} & \dots & f_{m,n} \end{pmatrix}} \bigoplus_{j\in[1,n]} Y_j$$

mit $\iota_k \, (f_{i,j})_{i,j} \, \pi_\ell = f_{k,\ell}$ für $k \in [1,m]$ und $\ell \in [1,n]$. Konstruieren kann man diesen Morphismus in zwei Schritten als $\begin{pmatrix} (f_{1,1} & \dots & f_{1,n}) \\ & \vdots & \\ (f_{m,1} & \dots & f_{m,n}) \end{pmatrix}$ (oder als $\left(\begin{pmatrix} f_{1,1} \\ \vdots \\ f_{m,1} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} f_{1,n} \\ \vdots \\ f_{m,n} \end{pmatrix} \right)$).

Auch die Eindeutigkeit folgt in zwei Schritten. Denn aus $\iota_k \tilde{f} \pi_\ell = f_{k,\ell}$ für $k \in [1,m]$ und $\ell \in [1,n]$ folgt $\iota_k \tilde{f} = (\, f_{k,1} \dots f_{k,n} \,)$ für $k \in [1,m]$, und daraus $\tilde{f} = \begin{pmatrix} (f_{1,1} & \dots & f_{1,n}) \\ & \vdots & \\ (f_{m,1} & \dots & f_{m,n}) \end{pmatrix}$.

Ferner ist $f = (\iota_i f \pi_j)_{i,j}$ für $\bigoplus_{i\in[1,m]} X_i \xrightarrow{f} \bigoplus_{j\in[1,n]} X_j$, also jeder Morphismus zwischen direkten Summen durch eine Matrix gegeben.

Wir vereinbaren noch, daß Leerstellen in Matrizen Nulleinträge bezeichnen.

Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ ist der identische Morphismus auf $\bigoplus_{i\in[1,m]} X_i$. Denn es ist $\iota_k \, \mathrm{id}_{\bigoplus_{i\in[1,m]} X_i} \, \pi_\ell = \begin{cases} 1 & \text{für } k = \ell \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ für $k, \ell \in [1,m]$, und dies charakterisiert die angegebene Matrix.

Eine Matrix mit nur Nulleinträgen ist der jeweilige Nullmorphismus.

(3) Seien $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ so, daß die direkte Summe $X \oplus Y$ von (X,Y) existiert. Es ist $X \oplus Y \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)} Y \oplus X$ ein Isomorphismus, der von $Y \oplus X \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)} X \oplus Y$ invertiert wird. In der Tat ist $\iota_1 \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \pi_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \pi_1 = \iota_2 \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \pi_1 = 1$; usf.

Definition 99 Eine Kategorie $\mathcal{A}$, welche ein Nullobjekt $0 = 0_{\mathcal{A}}$ besitzt, heißt *additiv,* falls folgende Axiome gelten.

(Add 1) Das Paar (X,Y) hat eine direkte Summe $X \oplus Y$, zusammen mit $\iota_1 : X \longrightarrow X \oplus Y$, $\iota_2 : Y \longrightarrow X \oplus Y$, $\pi_1 : X \oplus Y \longrightarrow X$ und $\pi_2 : X \oplus Y \longrightarrow Y$, für alle $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$.

(Add 2) Es ist $X \oplus X \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)} X \oplus X$ ein Isomorphismus für alle $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$.

Beispiel 100

(1) Ist R ein Ring, so ist R-Mod eine additive Kategorie. Was (Add 1) angeht, cf. Bemerkung 37. Die in Definition 32 definierten Matrizen stimmen mit den hier definierten Matrizen überein, wie man mittels Komposition mit Inklusions- und Projektionsmorphismen überprüft. Was (Add 2) angeht, es ist $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&0\\-1&1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) = \mathrm{id}$.

(2) Ist $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie, so auch $\mathcal{A}^\circ$. Denn dank Bemerkung 98.(3) ist $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)$ genau dann ein Isomorphismus, wenn $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ ein Isomorphismus ist, wobei diese Gleichheit wie in loc. cit. zu verifizieren ist. Letzerer Isomorphismus wird gebraucht, um (Add 2) für $\mathcal{A}^\circ$ zu zeigen, da sich beim Übergang von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{A}^\circ$ die Rollen von ι_i und π_i vertauschen.

(3) Die Kategorie, welche als Objekte die Mengen und als Morphismen Relationen zwischen Mengen hat, hat ein Nullobjekt und erfüllt (Add 1), nicht aber (Add 2). Cf. Aufgabe 38.

Sei im folgenden $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie und $0 = 0_{\mathcal{A}}$ ein darin gewähltes Nullobjekt.

Bemerkung 101 *Sei $m \geqslant 0$, seien $X_1, \ldots, X_m \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Es besitzt $(X_1, \ldots, X_m)$ eine direkte Summe.*

Beweis. Siehe Aufgabe 39.(1). □

Wir wählen nun für jedes endliche Tupel $(X_1, \ldots, X_m)$ von Objekten in $\mathcal{A}$ eine direkte Summe $\bigoplus_{i\in[1,m]} X_i$. Für ein nullelementiges Tupel wählen wir 0 als direkte Summe. Für ein einelementiges Tupel wählen wir seinen Eintrag als direkte Summe, wobei $\iota_1 = \pi_1 = \mathrm{id}$.

Für $m \geqslant 0$ und $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ schreiben wir $X^{\oplus m} := \bigoplus_{i\in[1,m]} X$. Insbesondere wird $X^{\oplus 0} = 0$ und $X^{\oplus 1} = X$.

Definition 102 Sei $n \geqslant 0$. Seien $f_1, \ldots, f_n : X \longrightarrow Y$ in $\mathcal{A}$. Setze

$$\left(X \xrightarrow{\sum_{i\in[1,n]} f_i} Y \right) := \left(X \xrightarrow{(1\,\ldots\,1)} X^{\oplus n} \xrightarrow{\begin{pmatrix} f_1 & & \\ & \ddots & \\ & & f_n \end{pmatrix}} Y^{\oplus n} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}} Y \right).$$

Beachte, daß $\sum_{i\in[1,0]} f_i = 0$ und $\sum_{i\in[1,1]} f_i = f_1$. Falls $n = 2$, so schreiben wir auch

$$\textstyle\sum_{i\in[1,2]} f_i \;=:\; f_1 + f_2 \,.$$

Bemerkung 103 *Seien $\ell, m, n \geqslant 0$. Seien $X_i \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ für $i \in [1,\ell]$, $Y_j \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ für $j \in [1,m]$ und $Z_k \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ für $k \in [1,n]$. Seien*

$$\textstyle\bigoplus_{i\in[1,\ell]} X_i \xrightarrow{(f_{i,j})_{i,j}} \bigoplus_{j\in[1,m]} Y_j \xrightarrow{(g_{j,k})_{j,k}} \bigoplus_{k\in[1,n]} Z_k$$

in $\mathcal{A}$ gegeben. Dann ist

$$(f_{i,j})_{i,j}\,(g_{j,k})_{j,k} \;=\; \left(\textstyle\sum_{j\in[1,m]} f_{i,j} g_{j,k}\right)_{i,k} .$$

Cf. Bemerkung 34. Diesen Matrixkalkül werden wir im folgenden kommentarlos verwenden.

Beweis. Siehe Aufgabe 39.(2). ▫

Bemerkung 104 *Seien $k, \ell \geqslant 0$. Seien $f_1, \ldots, f_{k+\ell} : X \longrightarrow Y$ in $\mathcal{A}$. Es ist*

$$\left(\sum_{i\in[1,k]} f_i\right) + \left(\sum_{i\in[1,\ell]} f_{i-k}\right) = \sum_{i\in[1,k+\ell]} f_i \,.$$

Insbesondere ist $(+)$ assoziativ. Wir dürfen also alle Klammern in einem iterierten via $(+)$ gebildeten Ausdruck weglassen. Ferner erhalten wir $\sum_{i\in[1,n]} f_i = f_1 + \cdots + f_n$; cf. Definition 102.

Beweis. Siehe Aufgabe 39.(3). ▫

Bemerkung 105 *Seien $k, \ell \geqslant 0$. Seien $f_i : X \longrightarrow Y$ für $i \in [1,k]$ und $g_j : Y \longrightarrow Z$ für $j \in [1,\ell]$ in $\mathcal{A}$. Es ist*

$$\left(\sum_{i\in[1,k]} f_i\right)\left(\sum_{j\in[1,\ell]} g_j\right) = \sum_{i\in[1,k]}\sum_{j\in[1,\ell]} f_i g_j \,.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 39.(4). ▫

Bemerkung 106 *Seien $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Es ist $\big({}_{\mathcal{A}}(X,Y), +\big)$ eine abelsche Gruppe, mit neutralem Element $0 = 0_{X,Y}$.*

Insbesondere ist $(-f)g = (-f)g + fg - fg = (-f+f)g - fg = 0g - fg = -fg$ für $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ in $\mathcal{A}$. Genauso ist $f(-g) = -fg$.

Beweis. Siehe Aufgabe 39.(5). ▫

Bemerkung 107 *Seien $m, n \geqslant 0$. Seien $X_i \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ für $i \in [1,m]$ und $Y_j \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ für $j \in [1,n]$. Seien $\bigoplus_{i\in[1,m]} X_i \underset{(f'_{i,j})_{i,j}}{\overset{(f_{i,j})_{i,j}}{\rightrightarrows}} \bigoplus_{j\in[1,n]} Y_j$ in $\mathcal{A}$. Es ist*

$$(f_{i,j})_{i,j} + (f'_{i,j})_{i,j} = (f_{i,j} + f'_{i,j})_{i,j} \,.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 39.(6). ▫

Definition 108 Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie mit Nullobjekt 0. Eine volle Teilkategorie $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ heißt *volle additive Teilkategorie,* falls $0 \in \operatorname{Ob}\mathcal{B}$ und falls für $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{B}$ auch $X \oplus Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{B}$.

Es ist $\mathcal{B}$ wieder eine additive Kategorie. Denn da $\mathcal{B}$ eine volle Teilkategorie ist, können wir aus (Add 1) für $\mathcal{A}$ mittels der gemachten Voraussetzung und wegen $\mathcal{B}$ voll in $\mathcal{A}$ folgern, daß (Add 1) für $\mathcal{B}$ gilt. Ferner können wir aus $\mathcal{B}$ voll in $\mathcal{A}$ und (Add 2) für $\mathcal{A}$ auch (Add 2) für $\mathcal{B}$ folgern.

3.2 Additive Funktoren

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ additive Kategorien. Sei F ein Funktor von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ mit $F0 \simeq 0$. Insbesondere bildet F Nullmorphismen auf Nullmorphismen ab; cf. Beispiel 87.

Bemerkung 109 *Seien $X_1, X_2 \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Wir haben die Morphismen*

$$F(X_1 \oplus X_2) \underset{\left(\begin{smallmatrix} F\iota_1 \\ F\iota_2 \end{smallmatrix}\right)}{\overset{(F\pi_1\ F\pi_2)}{\rightleftarrows}} FX_1 \oplus FX_2$$

Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

(1) *Es sind $(F\pi_1\ F\pi_2)$ und $\left(\begin{smallmatrix} F\iota_1 \\ F\iota_2 \end{smallmatrix}\right)$ sich invertierende Isomorphismen.*

(2) *Es ist $\left(\begin{smallmatrix} F\iota_1 \\ F\iota_2 \end{smallmatrix}\right)$ epimorph.*

(3) *Es ist $(F\pi_1\ F\pi_2)$ monomorph.*

Beweis. Mit Dualität genügt es, (2) $\Leftrightarrow$ (1) zu zeigen.

Zeigen wir (2) $\Rightarrow$ (1). Es ist $\left(\begin{smallmatrix} F\iota_1 \\ F\iota_2 \end{smallmatrix}\right)(F\pi_1\ F\pi_2) = \left(\begin{smallmatrix} F(\iota_1\pi_1) & F(\iota_1\pi_2) \\ F(\iota_2\pi_1) & F(\iota_2\pi_2) \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Da $\left(\begin{smallmatrix} F\iota_1 \\ F\iota_2 \end{smallmatrix}\right)$ epimorph ist, zeigt diese Gleichung, daß $\left(\begin{smallmatrix} F\iota_1 \\ F\iota_2 \end{smallmatrix}\right)$ ein Isomorphismus ist und $(F\pi_1\ F\pi_2)$ als Inversen hat; cf. Aufgabe 32.(5). ▫

Definition 110 Ein Funktor $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ heißt *additiv,* falls $F0 \simeq 0$ und falls für alle $X_1, X_2 \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ eine der äquivalenten Bedingungen (1-3) aus Bemerkung 109 zutrifft. Cf. auch Aufgabe 42.

Sei im folgenden $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ ein additiver Funktor.

Bemerkung 111 *Sei $k \geqslant 0$. Seien $X \xrightarrow{f_i} Y$ in $\mathcal{A}$ für $i \in [1,k]$. Es ist*

$$F(\textstyle\sum_{i\in[1,k]} f_i) \;=\; \sum_{i\in[1,k]} Ff_i\ .$$

Insbesondere ist $F(-f) = -Ff$ für $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathcal{A}$.

Beweis. Wir dürfen $k = 2$ annehmen. Es wird

$$\begin{aligned}
F(f_1 + f_2) &= F(1\ 1)\, F\left(\begin{smallmatrix} f_1 \\ f_2 \end{smallmatrix}\right) \\
&\overset{F \text{ add.}}{=} F(1\ 1)\,(F\pi_1\ F\pi_2)\left(\begin{smallmatrix} F\iota_1 \\ F\iota_2 \end{smallmatrix}\right) F\left(\begin{smallmatrix} f_1 \\ f_2 \end{smallmatrix}\right) \\
&= \left(F(1\ 1)\,F\pi_1 \quad F(1\ 1)\,F\pi_2\right) \begin{pmatrix} F\iota_1\, F\left(\begin{smallmatrix} f_1 \\ f_2 \end{smallmatrix}\right) \\ F\iota_2\, F\left(\begin{smallmatrix} f_1 \\ f_2 \end{smallmatrix}\right) \end{pmatrix} \\
&= \left(F((1\ 1)\pi_1) \quad F((1\ 1)\pi_2)\right) \begin{pmatrix} F(\iota_1\left(\begin{smallmatrix} f_1 \\ f_2 \end{smallmatrix}\right)) \\ F(\iota_2\left(\begin{smallmatrix} f_1 \\ f_2 \end{smallmatrix}\right)) \end{pmatrix} \\
&= (F1 \quad F1)\left(\begin{smallmatrix} Ff_1 \\ Ff_2 \end{smallmatrix}\right) \\
&= (1\ 1)\left(\begin{smallmatrix} Ff_1 \\ Ff_2 \end{smallmatrix}\right) \\
&= Ff_1 + Ff_2\ .
\end{aligned}$$

Insbesondere ist nun $F(-f) = F(-f) + Ff - Ff = F(-f+f) - Ff = F0 - Ff = 0 - Ff = -Ff$; cf. Beispiel 87. $\square$

Bemerkung 112 *Seien $m, n \geqslant 0$. Seien $X_i, Y_j \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ für $i \in [1,m]$ und $j \in [1,n]$. Sei $\bigoplus_{i\in[1,m]} X_i \xrightarrow{(f_{i,j})_{i,j}} \bigoplus_{j\in[1,n]} Y_j$ in $\mathcal{A}$. Wir haben folgendes kommutative Diagramm.*

$$\begin{tikzcd}
F(\bigoplus_{i\in[1,m]} X_i) \arrow[r, "F((f_{i,j})_{i,j})"] \arrow[d, "(F\pi_1 \dots F\pi_m)", "\wr"'] \arrow[dd, bend right=60, "\begin{pmatrix} F\iota_1 \\ \vdots \\ F\iota_m \end{pmatrix}", "\wr"'] & F(\bigoplus_{i\in[1,n]} Y_j) \arrow[d, "\wr", "(F\pi_1 \dots F\pi_n)"'] \arrow[dd, bend left=60, "\wr", "\begin{pmatrix} F\iota_1 \\ \vdots \\ F\iota_n \end{pmatrix}"'] \\
\bigoplus_{i\in[1,m]} FX_i \arrow[r, "(Ff_{i,j})_{i,j}"] & \bigoplus_{i\in[1,n]} FY_j \\
F(\bigoplus_{i\in[1,m]} X_i) \arrow[r, "F((f_{i,j})_{i,j})"] & F(\bigoplus_{i\in[1,n]} Y_j)
\end{tikzcd}$$

Beweis. Das obere Viereck kommutiert wegen

$$\begin{aligned}
\big(F\pi_1 \dots F\pi_m\big)\,(Ff_{i,j})_{i,j} &= \big(\textstyle\sum_{i\in[1,m]}(F\pi_i)(Ff_{i,1}) \;\dots\; \sum_{i\in[1,m]}(F\pi_i)(Ff_{i,n})\big) \\
&= \big(F(\textstyle\sum_{i\in[1,m]}\pi_i f_{i,1}) \;\dots\; F(\sum_{i\in[1,m]}\pi_i f_{i,n})\big) \\
&= \big(F((f_{i,1})_i) \;\dots\; F((f_{i,n})_i)\big) \\
&= \big(F((f_{i,j})_{i,j}\pi_1) \;\dots\; F((f_{i,j})_{i,j}\pi_n)\big) \\
&= \big(F((f_{i,j})_{i,j})F\pi_1 \;\dots\; F((f_{i,j})_{i,j})F\pi_n\big) \\
&= F\big((f_{i,j})_{i,j}\big)\,\big(F\pi_1 \dots F\pi_n\big)\ .
\end{aligned}$$

Dual dazu kommutiert das untere Viereck.

Bleibt zu zeigen, daß $\big(F\pi_1 \dots F\pi_m\big)$ ein Isomorphismus ist. In der Tat ist $\begin{pmatrix} F\iota_1 \\ \vdots \\ F\iota_m \end{pmatrix}\big(F\pi_1 \dots F\pi_m\big) = \begin{pmatrix} (F\iota_1)(F\pi_1) & \dots & (F\iota_1)(F\pi_m) \\ \vdots & & \vdots \\ (F\iota_m)(F\pi_1) & \dots & (F\iota_m)(F\pi_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ und

$$\big(F\pi_1 \dots F\pi_m\big)\begin{pmatrix} F\iota_1 \\ \vdots \\ F\iota_m \end{pmatrix} = \textstyle\sum_{i\in[1,m]}(F\pi_i)(F\iota_i) = F(\sum_{i\in[1,m]}\pi_i\iota_i) = F\,\mathrm{id} = \mathrm{id}$$

gemäß Bemerkungen 111 und 107. $\square$

Beispiel 113

(1) Sei $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ eine volle additive Teilkategorie. Dann ist der Inklusionsfunktor $\mathcal{A}' \hookrightarrow \mathcal{A}$ additiv.

(2) Sei $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Es ist ${}_{\mathcal{A}}(X,-) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{Z}\text{-Mod}$ gemäß Bemerkungen 106 und 105 wohldefiniert. Dieser Funktor ist additiv. Denn zum einen ist ${}_{\mathcal{A}}(X,0) \simeq 0$. Zum anderen ist für $Z_1, Z_2 \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$

$$\begin{array}{ccc}
{}_{\mathcal{A}}(X,\, Z_1 \oplus Z_2) & \xrightarrow[\sim]{({}_{\mathcal{A}}(X,\pi_1)\ {}_{\mathcal{A}}(X,\pi_2))} & {}_{\mathcal{A}}(X,\, Z_1) \oplus {}_{\mathcal{A}}(X,\, Z_2) \\
(u\ v) & \longmapsto & (u\ ,\ v)
\end{array}$$

gemäß (Sum 1). Cf. auch Aufgabe 24.(1).

(3) Sei $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Es ist ${}_{\mathcal{A}}(-,Y) : \mathcal{A}^\circ \longrightarrow \mathbf{Z}\text{-Mod}$ gemäß Bemerkungen 106 und 105 wohldefiniert. Dieser Funktor ist additiv. Denn zum einen ist ${}_{\mathcal{A}}(0,Y) \simeq 0$. Zum anderen ist für $Z_1\,,\, Z_2 \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$

$$\begin{array}{ccccc} {}_{\mathcal{A}}(Z_1 \oplus Z_2\,, Y) & \xrightarrow[\sim]{(\,{}_{\mathcal{A}}(\iota_1\,,Y)\quad {}_{\mathcal{A}}(\iota_2\,,Y)\,)} & {}_{\mathcal{A}}(Z_1\,,\,Y) & \oplus & {}_{\mathcal{A}}(Z_2\,,\,Y) \\ \binom{s}{t} & \longmapsto & (s & , & t) \end{array}$$

gemäß (Sum 2). Und beim Übergang von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{A}^\circ$ werden die Rollen von ι_i und π_i vertauscht. Cf. auch Aufgabe 24.(2).

(4) Seien R und S Ringe. Sei ${}_RM_S$ ein R-S-Bimodul. Es ist

$${}_RM_S \underset{S}{\otimes} - \;:\; S\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}$$

additiv. Siehe Aufgabe 24.(3).

(5) Sind $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B} \xrightarrow{G} \mathcal{C}$ additive Funktoren zwischen additiven Kategorien, so ist auch $\mathcal{A} \xrightarrow{G\circ F} \mathcal{C}$ additiv. Denn zum einen ist $GF0 \simeq G0 \simeq 0$. Zum anderen erhalten wir für $X_1\,,\, X_2 \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$

$$\begin{aligned} & \big(GF(X_1 \oplus X_2) \xrightarrow{(GF\pi_1\; GF\pi_2)} GFX_1 \oplus GFX_2\big) \\ = \; & \big(GF(X_1 \oplus X_2) \xrightarrow[\sim]{G(F\pi_1\; F\pi_2)} G(FX_1 \oplus FX_2) \xrightarrow[\sim]{(G\pi_1\; G\pi_2)} G(FX_1 \oplus FX_2)\big)\,, \end{aligned}$$

wie sich aus $\big(G\big(F\pi_1\; F\pi_2\big)\big)\big(G\pi_1\; G\pi_2\big) = \big((G(F\pi_1\; F\pi_2))(G\pi_1)\,(G(F\pi_1\; F\pi_2))(G\pi_2)\big) = \big(G((F\pi_1\; F\pi_2)\pi_1)\; G((F\pi_1\; F\pi_2)\pi_2)\big) = \big(GF\pi_1\; GF\pi_2\big)$ ergibt.

Nun haben wir unter der Kategorien und den Funktoren jeweils additive ausgezeichnet. Für Transformationen ist das nicht erforderlich, man betrachtet einfach alle Transformationen zwischen additiven Funktoren zwischen additiven Kategorien.

3.3 Faktorkategorien

Analog zur Bildung des Faktorringes eines Ringes modulo einem Ideal kann man auch die Faktorkategorie einer additiven Kategorie modulo einer vollen additiven Teilkategorie bilden.

Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie. Sei $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{A}$ eine volle additive Teilkategorie.

Für $X,\, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ setzen wir

$$\operatorname{Null}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(X,Y) := \left\{ f \in {}_{\mathcal{A}}(X,Y) \;:\; \begin{array}{l} \text{es gibt eine Faktorisierung} \\ (X \xrightarrow{f} Y) = (X \xrightarrow{f'} N \xrightarrow{f''} Y) \text{ für ein } N \in \operatorname{Ob}\mathcal{N} \end{array} \right\}.$$

Es ist $\mathrm{Null}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(X,Y) \subseteq {}_{\mathcal{A}}(X,Y)$ ein $\mathbf{Z}$-Teilmodul. Denn zum einen ist $(X \xrightarrow{0} Y) = (X \longrightarrow 0 \longrightarrow Y)$, wobei $0 \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$. Zum anderen ist für $(X \xrightarrow{f_1} Y) = (X \xrightarrow{f_1'} N_1 \xrightarrow{f_1''} Y)$ und $(X \xrightarrow{f_2} Y) = (X \xrightarrow{f_2'} N_2 \xrightarrow{f_2''} Y)$ mit $N_1\,,\, N_2 \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$ und für $z_1\,,\, z_2 \in \mathbf{Z}$

$$(X \xrightarrow{z_1 f_1 + z_2 f_2} Y) \;=\; (X \xrightarrow{(z_1 f_1' \; z_2 f_2')} N_1 \oplus N_2 \xrightarrow{\binom{f_1''}{f_2''}} Y)\,,$$

wobei $N_1 \oplus N_2 \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$.

Definition 114 Wir definieren die *Faktorkategorie* $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{N}$ wie folgt. Sei $\mathrm{Ob}(\mathcal{A}/\mathcal{N}) := \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Für $X,\, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}/\mathcal{N})$ sei

$${}_{\mathcal{A}/\mathcal{N}}(X,Y) \;:=\; {}_{\mathcal{A}}(X,Y)/\,\mathrm{Null}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(X,Y)\,.$$

Komposition sei repräsentantenweise definiert; sind also $X,\, Y,\, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}/\mathcal{N})$ und Repräsentanten $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ in $\mathcal{A}$ gegeben, so sei

$$(f + \mathrm{Null}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(X,Y))(g + \mathrm{Null}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(Y,Z)) \;:=\; (fg + \mathrm{Null}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(X,Z))\,.$$

Dies ist wohldefiniert, denn wenn $f - f'$ und $g - g'$ über je ein Objekt von $\mathcal{N}$ faktorisieren, dann auch $fg - f'g' = (f - f')g + f'(g - g')$, wobei $X \underset{f'}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y \underset{g'}{\overset{g}{\rightrightarrows}} Z$ in $\mathcal{A}$.

Die Axiome (Kat 1-4) vererben sich nun von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{A}/\mathcal{N}$.

Es ist e.g. jedes Objekt $N \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$ in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ isomorph zu 0, da $1_N - 0_{N,N}$ über $N \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$ faktorisiert.

Wir haben einen Restklassenfunktor

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{R = R_{\mathcal{A}/\mathcal{N}}} & \mathcal{A}/\mathcal{N} \\ (X \xrightarrow{f} Y) & \longmapsto & (X \xrightarrow{f + \mathrm{Null}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(X,Y)} Y) \end{array}$$

In der Regel schreiben wir unter Mißbrauch von Notation $f := f + \mathrm{Null}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(X,Y)$ für $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathcal{A}$.

Wir schreiben auch $f \equiv_{\mathcal{N}} f'$ für $Rf = Rf'$, i.e. für $f - f' \in \mathrm{Null}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(X,Y)$, wobei $X \underset{f'}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$ in $\mathcal{A}$.

Bemerkung 115 *Die Faktorkategorie $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ ist eine additive Kategorie. Es ist $\mathcal{A} \xrightarrow{R} \mathcal{A}/\mathcal{N}$ ein additiver Funktor. Insbesondere ist $0_{\mathcal{A}} = 0_{\mathcal{A}/\mathcal{N}}$. Ferner ist für $X,\, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A} = \mathrm{Ob}(\mathcal{A}/\mathcal{N})$ das Objekt $X \oplus Y$ sowohl die direkte Summe in $\mathcal{A}$ als auch in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$; Inklusions- und Projektionsmorphismen in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ werden von den entsprechenden Morphismen in $\mathcal{A}$ repräsentiert.*

Beweis. Siehe Aufgabe 44.(1). □

Bemerkung 116 (Universelle Eigenschaft Faktorkategorie)

Sei $\mathcal{B}$ eine weitere additive Kategorie.

(1) *Sei $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ ein additiver Funktor so, daß $FN \simeq 0$ für alle $N \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Dann gibt es genau einen additiven Funktor $\mathcal{A}/\mathcal{N} \xrightarrow{\bar{F}} \mathcal{B}$ mit $\bar{F} \circ R = F$.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "R"'] & \mathcal{B} \\ \mathcal{A}/\mathcal{N} \arrow[ur, "\bar{F}"'] & \end{tikzcd}$$

(2) *Seien $\mathcal{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}} \mathcal{B}$ additive Funktoren so, daß $FN \simeq 0$ und $GN \simeq 0$ für alle $N \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Sei $F \xrightarrow{a} G$ eine Transformation. Dann gibt es genau eine Transformation $\bar{F} \xrightarrow{\bar{a}} \bar{G}$ so, daß $\bar{a}X = \bar{a}RX = aX$ für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "a\Downarrow"] \arrow[d, "R"'] & \mathcal{B} \\ \mathcal{A}/\mathcal{N} \arrow[ur, bend left, "\bar{F}"] \arrow[ur, bend right, "\bar{G}"'] \arrow[ur, phantom, "\Rightarrow \bar{a}"] & \end{tikzcd}$$

Beweis. Siehe Aufgabe 44.(2, 3). Cf. auch Aufgabe 75. □

Beispiel 117

(1) Sei $\mathcal{A} := \mathbf{Z}/16\text{-mod} \subseteq \mathbf{Z}/16\text{-Mod}$ die volle additive Teilkategorie der endlichen $\mathbf{Z}/16$-Moduln. Sei $\mathcal{N} := \mathbf{Z}/16\text{-free} \subseteq \mathbf{Z}/16\text{-mod}$ die volle additive Teilkategorie der $\mathbf{Z}/16$-Moduln der Form $(\mathbf{Z}/16)^{\oplus k}$ für ein $k \geqslant 0$.

Es faktorisiert e.g.

$$(\mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 2 \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/8 \oplus \mathbf{Z}/4) \;=\; (\mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/16 \oplus \mathbf{Z}/16 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/8 \oplus \mathbf{Z}/4)\,.$$

Also repräsentiert dieser Morphismus den Nullmorphismus in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$. In anderen Worten, es ist $R\left(\begin{smallmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 2 \end{smallmatrix}\right) = 0$, i.e. $\left(\begin{smallmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 2 \end{smallmatrix}\right) \equiv_{\mathcal{N}} 0$.

Es ist $\mathbf{Z}/8 \not\simeq 0$ in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$. Denn wäre dem so, so würde $\mathbf{Z}/8 \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/8$ über einen Modul der Form $\mathbf{Z}/16^{\oplus a}$ mit $a \geqslant 0$ faktorisiern. Da die Repräsentanten der Matrixeinträge eines Morphismus $\mathbf{Z}/8 \longrightarrow \mathbf{Z}/16^{\oplus a}$ alle durch 2 teilbar sind, kann das nicht sein.

Es ist $\mathbf{Z}/16 \simeq 0$ in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$. In $\mathcal{A}$ ist jedes Objekt isomorph zu einem der Form $(\mathbf{Z}/2)^{\oplus a_1} \oplus (\mathbf{Z}/4)^{\oplus a_2} \oplus (\mathbf{Z}/8)^{\oplus a_3} \oplus (\mathbf{Z}/16)^{\oplus a_4}$ mit $a_i \geqslant 0$; cf. Aufgabe 16, §1.2.7. Da $\mathbf{Z}/16 \simeq 0$ ist in der additiven Kategorie $\mathcal{A}/\mathcal{N}$, folgt, daß in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ jedes Objekt isomorph zu einem der Form $(\mathbf{Z}/2)^{\oplus a_1} \oplus (\mathbf{Z}/4)^{\oplus a_2} \oplus (\mathbf{Z}/8)^{\oplus a_3}$ ist mit $a_i \geqslant 0$.

Es ist $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ keine abelsche Kategorie; cf. Definition 120 unten. Denn in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ hat e.g. der Morphismus $\mathbf{Z}/4 \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/4$ keinen Kern; cf. Definition 118.(1) unten. Sei dazu *angenommen,* es ist $(\mathbf{Z}/2)^{\oplus a_1} \oplus (\mathbf{Z}/4)^{\oplus a_2} \oplus (\mathbf{Z}/8)^{\oplus a_3} \xrightarrow{f} \mathbf{Z}/4$ ein Kern. Dann ist f ein Monomorphismus; cf. Bemerkung 119.(1) unten. Insbesondere ist das jeweilige Kompositum mit einer Summandeninklusion ein Monomorphismus. Nun gibt es aber in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ keinen Monomorphismus von $\mathbf{Z}/8$ nach $\mathbf{Z}/4$, da alle solche Morphismen in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ von links durch $\mathbf{Z}/2 \xrightarrow{4} \mathbf{Z}/8$ annulliert werden. Also ist $a_3 = 0$. Ferner gibt es in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ keinen Monomorphismus von $\mathbf{Z}/2$ nach $\mathbf{Z}/4$, da alle solche Morphismen in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ von links durch $\mathbf{Z}/8 \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/2$ annulliert werden. Also ist $a_1 = 0$. Desweiteren sind die einzigen Monomorphismen von $\mathbf{Z}/4$ nach $\mathbf{Z}/4$ die beiden Isomorphismen $\mathbf{Z}/4 \xrightarrow{\pm 1} \mathbf{Z}/4$, da die anderen beiden Morphismen in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ von $\mathbf{Z}/4 \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/4$ von links annulliert werden. Wäre nun $a_2 \geqslant 2$, so gäbe es einen nichtverschwindenden Morphismus von $\mathbf{Z}/4$ nach $(\mathbf{Z}/4)^{\oplus a_2}$, der f in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ von links annulliert – Matrixeinträge ± 1 an zwei Stellen, sonst Nullen, genügen dafür. Da $\mathbf{Z}/4 \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/4$ selbst in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ kein Monomorphismus ist, ist $a_2 \geqslant 1$; cf. Bemerkung 119.(3) unten. Insgesamt folgt $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0$ und, daß f ein Isomorphismus ist. Dies aber *widerspricht* der Tatsache, daß $\mathbf{Z}/4 \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/4$ in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ nicht verschwindet; cf. Bemerkung 119.(5, 4) unten.

(2) Sei $\mathcal{A} := \mathbf{Z}/4\text{-mod} \subseteq \mathbf{Z}/4\text{-Mod}$ die volle additive Teilkategorie der endlichen $\mathbf{Z}/4$-Moduln. Sei $\mathcal{N} := \mathbf{Z}/4\text{-free} \subseteq \mathbf{Z}/4\text{-mod}$ die volle additive Teilkategorie der $\mathbf{Z}/4$-Moduln der Form $(\mathbf{Z}/4)^{\oplus k}$ für ein $k \geqslant 0$.

Wir haben die Funktoren $\mathbf{Z}/2\text{-mod} \hookrightarrow \mathbf{Z}/4\text{-mod} \xrightarrow{R} (\mathbf{Z}/4\text{-mod})/(\mathbf{Z}/4\text{-free}) =: \mathcal{A}/\mathcal{N}$. Wir behaupten, daß ihr Kompositum $\mathbf{Z}/2\text{-mod} \xrightarrow{F} \mathcal{A}/\mathcal{N}$ eine Äquivalenz ist.

In $\mathbf{Z}/4$-mod ist jedes Objekt isomorph zu einem der Form $(\mathbf{Z}/2)^{\oplus a} \oplus (\mathbf{Z}/4)^{\oplus b}$ für gewisse $a, b \geqslant 0$; cf. Aufgabe 16, §1.2.7. Da in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ aber $\mathbf{Z}/4 \simeq 0$ ist, ist darin auch $(\mathbf{Z}/2)^{\oplus a} \oplus (\mathbf{Z}/4)^{\oplus b} \simeq (\mathbf{Z}/2)^{\oplus a}$. Somit ist F dicht.

Sind $X \xleftarrow{f} X'$ und $Y \xrightarrow{g} Y'$ Morphismen in $\mathbf{Z}/2$-mod, so haben wir folgendes kommutative Viereck von Abbildungen.

$$\begin{tikzcd}
{}_{\mathbf{Z}/2}(X, Y) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "{}_{\mathbf{Z}/2}(f,g)"'] & {}_{\mathcal{A}/\mathcal{N}}(FX, FY) \arrow[d, "{}_{\mathcal{A}/\mathcal{N}}(Ff,Fg)"] \\
{}_{\mathbf{Z}/2}(X', Y') \arrow[r, "F"] & {}_{\mathcal{A}/\mathcal{N}}(FX', FY')
\end{tikzcd}$$

Dies gilt insbesondere für Isomorphismen f und g. Nun ist in $\mathbf{Z}/2$-mod jedes Objekt isomorph zu einem der Form $(\mathbf{Z}/2)^{\oplus a}$ für ein $a \geqslant 0$. Um zu zeigen, daß F voll und treu ist, genügt es also zu zeigen, daß die a priori surjektive Abbildung

$${}_{\mathbf{Z}/2}((\mathbf{Z}/2)^{\oplus a}, (\mathbf{Z}/2)^{\oplus a'}) \xrightarrow{F} {}_{\mathcal{A}/\mathcal{N}}((\mathbf{Z}/2)^{\oplus a}, (\mathbf{Z}/2)^{\oplus a'})$$

bijektiv ist. In anderen Worten, es genügt zu zeigen, daß $\mathrm{Null}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}((\mathbf{Z}/2)^{\oplus a}, (\mathbf{Z}/2)^{\oplus a'})$ verschwindet. Nun ist aber für ein gegebenes $b \geqslant 0$ jeder Repräsentant eines Eintrags der Matrix zu einem Morphismus $(\mathbf{Z}/2)^{\oplus a} \longrightarrow (\mathbf{Z}/4)^{\oplus b}$ durch 2 teilbar. Somit verschwindet $(\mathbf{Z}/2)^{\oplus a} \longrightarrow (\mathbf{Z}/4)^{\oplus b} \longrightarrow (\mathbf{Z}/2)^{\oplus a'}$ in der Tat.

Kapitel 4

Abelsche Kategorien

Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie. Sei 0 ein darin gewähltes Nullobjekt. Alle folgenden Objekte und Morphismen seien aus $\mathcal{A}$.

4.1 Kerne und Cokerne

Definition 118 Sei $X \xrightarrow{f} Y$ gegeben.

(1) Ein Morphismus $K \xrightarrow{i} X$ heißt *Kern* von f, falls $if = 0$ und falls für jeden Morphismus $T \xrightarrow{t} X \xrightarrow{f} Y$ mit $tf = 0$ genau ein Morphismus $T \xrightarrow{t'} K$ mit $t'i = t$ existiert.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, "f"] & Y \\
T \arrow[u, dotted, "\exists! t'"] \arrow[ur, "t"] \arrow[urr, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

(1°) Ein Morphismus $Y \xrightarrow{r} C$ heißt *Cokern* von f, falls $fr = 0$ und falls für jeden Morphismus $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{t} T$ mit $ft = 0$ genau ein Morphismus $C \xrightarrow{t'} T$ mit $rt' = t$ existiert.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[drr, "0"'] & Y \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "t"] & C \arrow[d, dotted, "\exists! t'"] \\
& & T
\end{tikzcd}$$

Cf. Bemerkung 39.

Oft spricht man auch verkürzend von K resp. C als von einem Kern resp. Cokern von f.

Bemerkung 119 *Sei* $X \xrightarrow{f} Y$ *in* $\mathcal{A}$.

(1) *Ist* $K \xrightarrow{i} X$ *ein Kern von* $X \xrightarrow{f} Y$, *so ist* i *ein Monomorphismus.*

(2) *Sind* $K \xrightarrow{i} X$ *und* $K' \xrightarrow{i'} X$ *Kerne von* $X \xrightarrow{f} Y$, *so gibt es einen Isomorphismus* $K' \xrightarrow[\sim]{k} K$ *mit* $ki = i'$, *eindeutig dadurch bestimmt.*

(3) *Es ist* $0 \longrightarrow X$ *genau dann ein Kern von* $X \xrightarrow{f} Y$, *wenn* f *ein Monomorphismus ist.*

(4) *Es ist* $X \xrightarrow{1} X$ *genau dann ein Kern von* $X \xrightarrow{f} Y$, *wenn* $f = 0$.

(5) *Ist* $K \xrightarrow{i} X$ *ein Kern von* $X \xrightarrow{f} Y$, *und ist* $K' \xrightarrow[\sim]{k} K$ *ein Isomorphismus, dann ist auch* $K' \xrightarrow{ki} X$ *ein Kern von* $X \xrightarrow{f} Y$.

(6) *Sei* $Y \xrightarrow{g} Z$ *ein Monomorphismus. Ein Morphismus* $K \xrightarrow{i} X$ *ist genau dann ein Kern von* $X \xrightarrow{f} Y$, *wenn er ein Kern von* $X \xrightarrow{fg} Z$ *ist.*

Beweis. Zu (1). Seien $T \underset{\tilde{t}}{\overset{t}{\rightrightarrows}} K$ mit $ti = \tilde{t}i$, also mit $(t - \tilde{t})i = 0$ gegeben. Da $0f = 0$, gibt es genau einen Morphismus $T \xrightarrow{t'} K$ mit $t'i = 0$. Also ist zum einen $t' = t - \tilde{t}$, und zum anderen $t' = 0$. Es folgt $t - \tilde{t} = 0$.

Zu (2). Da $if = 0$, gibt es genau ein k mit $ki' = i$. Da $i'f = 0$, gibt es genau ein k' mit $k'i = i'$. Also ist $kk'i = ki' = i$, wegen i monomorph also $kk' = 1$. Genauso folgt $k'k = 1$.

Zu (3). Sei zum einen f ein Monomorphismus. Es ist $(0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y) = (0 \xrightarrow{0} Y)$. Sei ferner $T \xrightarrow{t} X$ mit $tf = 0 = 0f$. Dann ist $t = 0$. In anderen Worten, es gibt genau einen Morphismus $T \longrightarrow 0$ mit $(T \longrightarrow 0 \longrightarrow X) = (T \xrightarrow{t} X)$. Also ist $0 \longrightarrow X$ ein Kern von $X \xrightarrow{f} Y$.

Sei zum anderen $0 \longrightarrow X$ ein Kern von $X \xrightarrow{f} Y$. Seien $T \underset{\tilde{t}}{\overset{t}{\rightrightarrows}} X$ mit $tf = \tilde{t}f$. Dann ist $(t - \tilde{t})f = 0$, also faktorisiert $t - \tilde{t}$ über $0 \longrightarrow X$, i.e. $t - \tilde{t} = 0$. Folglich ist f monomorph.

Zu (4). Sei $f = 0$. Es ist $(X \xrightarrow{1} X \xrightarrow{0} Y) = (X \xrightarrow{0} Y)$. Sei $T \xrightarrow{t} X$ mit $t0 = 0$. Dann gibt es genau einen Morphismus $T \xrightarrow{t'} X$ mit $t'1 = t$, nämlich $t' = t$. Also ist $X \xrightarrow{1} X$ ein Kern von $X \xrightarrow{0} Y$.

Sei umgekehrt $X \xrightarrow{1} X$ ein Kern von $X \xrightarrow{f} Y$. Dann ist $0 = 1f = f$.

Zu (5). Es ist $(ki)f = 0$. Ist $tf = 0$, so ist $t = t'i = (t'k^{-1})(ki)$ für ein t'. Eindeutigkeit folgt aus ki monomorph.

Zu (6). Sei zum einen i ein Kern von f. Es ist $i(fg) = 0$. Ist $t(fg) = 0$, so ist $tf = 0$, und somit gibt es genau ein t' mit $t = t'i$.

Sei zum anderen i ein Kern von fg. Aus $i(fg) = 0$ folgt $if = 0$. Ist $tf = 0$, so ist $t(fg) = 0$, und somit gibt es genau ein t' mit $t = t'i$. $\square$

4.2 Begriff der abelschen Kategorie

Definition 120 Die additive Kategorie $\mathcal{A}$ heißt *abelsch,* falls folgende Bedingungen erfüllt sind.

(Ab 1) Jeder Morphismus in $\mathcal{A}$ hat einen Kern.

(Ab 1°) Jeder Morphismus in $\mathcal{A}$ hat einen Cokern.

(Ab 2) Jeder Monomorphismus in $\mathcal{A}$ ist ein Kern eines Morphismus in $\mathcal{A}$.

(Ab 2°) Jeder Epimorphismus in $\mathcal{A}$ ist ein Cokern eines Morphismus in $\mathcal{A}$.

Ist $\mathcal{A}$ abelsch, so wählen wir für jeden Morphismus $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathcal{A}$ einen Kern $\mathrm{K}_f \xrightarrow{\iota=\iota_f} X$ und einen Cokern $Y \xrightarrow{\rho=\rho_f} \mathrm{C}_f$. Dies so, daß $\mathrm{K}_f = 0$, falls f monomorph ist, und so, daß $\mathrm{C}_f = 0$, falls f epimorph ist. Ferner so, daß $(\mathrm{K}_f \xrightarrow{\iota} X) = (X \xrightarrow{1} X)$ und $(Y \xrightarrow{\rho} \mathrm{C}_f) = (Y \xrightarrow{1} Y)$, falls $f = 0$.

Beispiel 121

(1) Sei R ein Ring. Es ist R-Mod eine abelsche Kategorie. Denn nach Beispiel 100 ist sie additiv. Nach Bemerkung 39 hat darin jeder Morphismus Kern und Cokern, nämlich die gleichnamigen Standardkonstruktionen, welche wir auch wählen.

Zu (Ab 2). Ist $M \xrightarrow{f} N$ ein Monomorphismus darin, also injektiv, so haben wir folgendes kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "f|^{\mathrm{Im}\, f}", "\wr"'] & & N \arrow[r, "\rho"] & \mathrm{Cokern}\, f \\
\mathrm{Im}\, f \arrow[r, equal] & \mathrm{Kern}\, \rho \arrow[ur, "\iota"'] & &
\end{tikzcd}$$

Mit $\mathrm{Kern}\, \rho \xrightarrow{\iota} N$ ist daher auch $M \xrightarrow{f} N$ ein Kern von $N \xrightarrow{\rho} \mathrm{Cokern}\, f$.

Zu (Ab 2°). Ist $M \xrightarrow{f} N$ ein Epimorphismus darin, also surjektiv, so haben wir folgendes kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Kern}\, f \arrow[r, "\iota"] & M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\rho"'] & & N \arrow[d, equal] \\
& & \mathrm{Cokern}\, \iota \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Im}\, f
\end{tikzcd}$$

Mit $M \xrightarrow{\rho} \mathrm{Cokern}\, \iota$ ist also auch $M \xrightarrow{f} N$ ein Cokern von $\mathrm{Kern}\, f \xrightarrow{\iota} M$.

Cf. Lemma 30.

(2) Ist $\mathcal{A}$ abelsch, so auch $\mathcal{A}^\circ$.

Im allgemeinen ist $(R\text{-Mod})^\circ$ aber keine Modulkategorie mehr. Um ein Argument zu skizzieren, es ist in R-Mod der kanonische Morphismus vom Coprodukt ins Produkt monomorph, aber i.a. nicht isomorph, in $(R\text{-Mod})^\circ$ also epimorph, aber i.a. nicht isomorph.

4.3 Homomorphiesatz

Sei $\mathcal{A}$ nun eine abelsche Kategorie.

Lemma 122 (Wechsellemma) *Seien $Z \xrightarrow{f} X$ und $Z \xrightarrow{g} Y$ gegeben. Sei $K \xrightarrow{i} Z$ ein Kern von f. Sei $L \xrightarrow{j} Z$ ein Kern von g. Es existiert folgendes kommutative Diagramm, in welchem v ein Kern von jf und u ein Kern von ig ist.*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "u", "\bullet"{marking}] \arrow[d, "v", "\bullet"{marking}] & K \arrow[d, "i", "\bullet"{marking}] \arrow[dr, "ig"] & \\
L \arrow[r, "j", "\bullet"{marking}] \arrow[dr, "jf"'] & Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & Y \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Hierzu kann ein beliebiger Kern v von jf vorgegeben werden.

Beweis. Sei v ein Kern von jf. Da $(vj)f = 0$ und i Kern von f ist, gibt es einen Morphismus $M \xrightarrow{u} K$ mit $ui = vj$. Da vj monomorph ist, ist auch u monomorph.

Bleibt zu zeigen, daß u ein Kern von ig ist. Es ist $uig = vjg = 0$. Sei t mit $tig = 0$ gegeben. Da j Kern von g ist, gibt es ein s mit $sj = ti$. Es ist $sjf = tif = 0$. Da v ein Kern von jf ist, gibt es ein w mit $wv = s$. Es ist $wui = wvj = sj = ti$, wegen i monomorph also $wu = t$. Die Eindeutigkeit von w bezüglich $wu = t$ folgt aus der Monomorphie von u.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, "w"] \arrow[drr, "t"] \arrow[ddr, "s"'] & & & \\
& M \arrow[r, "u", "\bullet"{marking}] \arrow[d, "v", "\bullet"{marking}] & K \arrow[d, "i", "\bullet"{marking}] \arrow[dr, "ig"] & \\
& L \arrow[r, "j", "\bullet"{marking}] \arrow[dr, "jf"'] & Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & Y \\
& & X &
\end{tikzcd}$$

□

Lemma 123 (Homomorphiesatz)
Sei $X \xrightarrow{f} Y$ gegeben. Sei i ein Kern von f. Sei r' ein Cokern von i. Sei r ein Cokern von f. Sei i' ein Kern von r. Es gibt ein kommutatives Diagramm wie folgt.

$$\begin{tikzcd}
& & C' \arrow[dd, "\tilde{f}", "\wr"'] & & \\
K \arrow[r, "i", "\bullet"{marking}] & X \arrow[ur, "r'", "\times"{marking}] \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[r, "r", "|"{marking}] & C \\
& & K' \arrow[ur, "i'", "\bullet"{marking}] & &
\end{tikzcd}$$

Cf. Lemma 30.

Beweis. Siehe Aufgabe 47.(3). □

Cf. auch die Aussagen in Aufgabe 47.(1, 2), die ihrerseits wieder aus Lemma 123 folgen.

Bemerkung 124

(1) *Für alle* $X \xrightarrow{f} Y$ *in* $\mathcal{A}$ *können wir eine Faktorisierung*

$$(X \xrightarrow{f} Y) \;=\; (X \overset{\bar{f}}{\rightarrowtail} \mathrm{I}_f \overset{\dot{f}}{\twoheadrightarrow} Y)$$

wählen, in welcher $\bar{f}$ *ein Cokern von* ι_f *und* $\dot{f}$ *ein Kern von* ρ_f *ist.*

Es heißt I_f *das* (gewählte) Bild *von* f.

Wähle insbesondere $\bar{\mathrm{id}} = \mathrm{id}$ *und* $\dot{\mathrm{id}} = \mathrm{id}$.

Wähle ferner $\mathrm{I}_0 = 0$.

Ist R *ein Ring und* $X \xrightarrow{f} Y$ *in* R-Mod, *so wählen wir* $\mathrm{I}_f = \operatorname{Im} f$, $\bar{f} = f|^{\operatorname{Im} f}$ *und* $\dot{f} = \mathrm{id}_Y|_{\operatorname{Im} f}$.

(2) *Sei folgendes kommutative Diagramm in* $\mathcal{A}$ *gegeben.*

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, tail, two heads, "i"] & X \arrow[r, tail, "u"] \arrow[d, "x"'] & A \arrow[r, tail, two heads, "v"] & Y \arrow[r, tail, "r"] \arrow[d, "y"] & C \\
K' \arrow[r, tail, two heads, "i'"] & X' \arrow[r, tail, "u'"] & A' \arrow[r, tail, two heads, "v'"] & Y' \arrow[r, tail, "r'"] & C'
\end{tikzcd}$$

Sei darin i *ein Kern von* uv, *damit auch von* u. *Sei* i' *ein Kern von* $u'v'$, *damit auch von* u'.

Sei darin r *ein Cokern von* uv, *damit auch von* v. *Sei* r' *ein Cokern von* $u'v'$, *damit auch von* v'.

Es gibt genau ein k *mit* $ki' = ix$. *Es gibt genau ein* c *mit* $rc = yr'$. *Es gibt ein* a *mit* $ua = xu'$ *und* $av' = vy$, *und jede dieser Gleichungen legt* a *eindeutig fest.*

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, tail, two heads, "i"] \arrow[d, dotted, "\exists! k"'] & X \arrow[r, tail, "u"] \arrow[d, "x"'] & A \arrow[r, tail, two heads, "v"] \arrow[d, dotted, "\exists! a"] & Y \arrow[r, tail, "r"] \arrow[d, "y"] & C \arrow[d, dotted, "\exists! c"] \\
K' \arrow[r, tail, two heads, "i'"] & X' \arrow[r, tail, "u'"] & A' \arrow[r, tail, two heads, "v'"] & Y' \arrow[r, tail, "r'"] & C'
\end{tikzcd}$$

(3) *Sei* $uv = u'v'$, *seien* u, u' *epimorph, und seien* v, v' *monomorph. Dann gibt es einen Isomorphismus* a *mit* $ua = u'$ *und* $av' = v$, *eindeutig durch jede der beiden Gleichungen festgelegt.*

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dr, tail, two heads, "v"] \arrow[d, "\wr", "\exists! a"'] & \\
X \arrow[ur, tail, "u"] \arrow[dr, tail, "u'"'] & & Y \\
 & A' \arrow[ur, tail, two heads, "v'"'] &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Zu (1). Dies folgt mit Lemma 123.

Zu (2). Die Aussage über k folgt aus $(ix)(u'v') = iuvy = 0$. Die Aussage über c dual.

Zu a. Die Eindeutigkeitsaussagen folgen aus u epimorph resp. v' monomorph. Zur Existenz. Nach Lemma 123 (oder Aufgabe 47.(1)) ist v' ein Kern von r'. Da $vyr' = vrc = 0$, gibt es ein a mit $av' = vy$. Da $(ua)v' = uvy = (xu')v'$ und da v' monomorph ist, folgt $ua = xu'$.

Zu (3). Existenz und Eindeutigkeit des Morphismus a folgt mit (2), angewandt auf $x = \mathrm{id}$ und $y = \mathrm{id}$. Da u' epimorph ist, gilt das auch für a. Da v monomorph ist, gilt das auch für a. Nach Lemma 123 (oder Aufgabe 47.(2)) ist a also insgesamt ein Isomorphismus. ▫

4.4 Exakte Sequenzen

Sei $\mathcal{A}$ weiterhin eine abelsche Kategorie.

Definition 125 Sei $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} X''$ in $\mathcal{A}$ gegeben.

(1) Es heißt (i, r) eine *kurz exakte Sequenz,* falls i ein Kern von r und r ein Cokern von i ist.

Äquivalent hierzu ist (i, r) kurz exakt, falls i monomorph ist und r ein Cokern von i. Denn nach Lemma 123 (oder Aufgabe 47.(1)) ist diesenfalls i auch ein Kern von r.

Ebenfalls äquivalent hierzu ist (i, r) kurz exakt, falls i ein Kern von r ist und r epimorph.

(2) Es heißt (i, r) eine *linksexakte* Sequenz falls i ein Kern von r ist.

(2°) Es heißt (i, r) eine *rechtsexakte* Sequenz, falls r ein Cokern von i ist.

Beispiel 126 Seien $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Es ist $X \xrightarrow{(1\,0)} X \oplus Y \xrightarrow{\binom{0}{1}} Y$ kurz exakt. In der Tat ist $(1\,0)$ ein Kern von $\binom{0}{1}$. Denn zum einen ist $(1\,0)\binom{0}{1} = 0$. Zum anderen, ist $(s\,t)\binom{0}{1} = 0$, dann ist $(s\,t) = (s\,0) = s\,(1\,0)$, und s ist dadurch auch eindeutig festgelegt. Dual ist $\binom{0}{1}$ ein Cokern zu $(1\,0)$.

Solche Sequenzen, und die als Diagramm isomorph zu solchen, heißen *split kurz exakt.* Vgl. Aufgabe 51.(2).

Beispiel 127 Sei R ein Ring. Sei in der abelschen Kategorie R-Mod die Sequenz $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} X''$ gegeben.

In R-Mod stimmen die beiden Begriffe der linksexakten Sequenz aus den Definitionen 47 und 125 überein. Denn ist (i, r) linksexakt im alten Sinne, so ist $X' \xrightarrow[\sim]{i|^{\operatorname{Im} i}} \operatorname{Im} i = \operatorname{Kern} r$, also i im neuen Sinne auch ein Kern von r; somit ist (i, r) auch im neuen Sinne

linksexakt. Ist umgekehrt (i,r) im neuen Sinne linksexakt, so haben wir eine Faktorisierung $(X' \xrightarrow{i} X) = (X' \xrightarrow{\sim} \operatorname{Kern} r \xrightarrow{\iota} X)$, und also ist $\operatorname{Im} i = \operatorname{Kern} r$; da auch noch i injektiv ist, ist somit (i,r) auch im alten Sinne linksexakt.

In R-Mod stimmen die beiden Begriffe der rechtsexakten Sequenz aus den Definitionen 47 und 125 überein. Denn ist (i,r) rechtsexakt im alten Sinne, so ist $X/\operatorname{Im} i = X/\operatorname{Kern} r \xrightarrow[\sim]{\bar{r}} Y$, wobei $\bar{r} : x + \operatorname{Im} i \longmapsto xr$, also r im neuen Sinne auch ein Cokern von i; somit ist (i,r) auch im neuen Sinne rechtsexakt. Ist umgekehrt (i,r) im neuen Sinne rechtsexakt, so haben wir eine Faktorisierung $(X \xrightarrow{r} X'') = (X \xrightarrow{\rho} \operatorname{Cokern} i \xrightarrow{\sim} X'')$, und also ist $\operatorname{Im} i = \operatorname{Kern} \rho = \operatorname{Kern} r$; da auch noch r surjektiv ist, ist somit (i,r) auch im alten Sinne rechtsexakt.

Insgesamt stimmen auch die beiden Begriffe der kurz exakten Sequenzen überein.

Definition 128 Sei $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ ein additiver Funktor zwischen abelschen Kategorien.

(1) Es heißt F exakt, falls er kurz exakte Sequenzen in kurz exakte Sequenzen überführt.

(2) Es heißt F linksexakt, falls er kurz exakte Sequenzen in linksexakte Sequenzen überführt.

(2°) Es heißt F rechtsexakt, falls er kurz exakte Sequenzen in rechtsexakte Sequenzen überführt.

Ein linksexakter Funktor bildet auch jede linksexakte Sequenz (i,r) auf eine linksexakte Sequenz (Fi, Fr) ab. Denn aus $(i,\bar{r})$ und $(\dot{r}, \rho_{\dot{r}})$ kurz exakt folgt $(Fi, F\bar{r})$ und $(F\dot{r}, F\rho_{\dot{r}})$ linksexakt; da insbesondere $F\dot{r}$ monomorph ist und $Fr = (F\bar{r})(F\dot{r})$, folgt, daß (Fi, Fr) linksexakt ist; cf. Bemerkung 119.(6).

Dual bildet ein rechtsexakter Funktor auch jede rechtsexakte Sequenz auf eine rechtsexakte ab.

Beispiel 129

(1) Sei $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$.

Es ist ${}_{\mathcal{A}}(X,-) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{Z}$-Mod linksexakt. Siehe Aufgabe 49.

Dual hierzu ist auch ${}_{\mathcal{A}}(-,X) : \mathcal{A}^\circ \longrightarrow \mathbf{Z}$-Mod linksexakt.

Cf. auch Lemma 52 für eine ähnliche Aussage in Moduln.

(2) Seien R und S Ringe, und sei ${}_RM_S$ gegeben. Dann ist ${}_RM_S \underset{S}{\otimes} - : S\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}$ rechtsexakt; cf. Lemma 60.(2).

Definition 130 Eine Folge

$$(*) \qquad \cdots \xrightarrow{f^{i-2}} X^{i-1} \xrightarrow{f^{i-1}} X^i \xrightarrow{f^i} X^{i+1} \xrightarrow{f^{i+1}} \cdots$$

in $\mathcal{A}$ heiße *lang exakte Sequenz,* falls $\mathrm{I}_{f^{i-1}} \overset{\dot{f}^{i-1}}{\twoheadrightarrow} X^i \overset{\bar{f}^i}{\rightarrowtail} \mathrm{I}_{f^i}$ kurz exakt ist für alle i.

Bricht hierbei die Folge an einer Stelle ab, so denke man sie sich durch Nullobjekte ergänzt.

Äquivalent zur Faktorisierung $(X^i \xrightarrow{f^i} X^{i+1}) = (X^i \overset{\bar{f}^i}{\rightarrowtail} \mathrm{I}_{f^i} \overset{\dot{f}^i}{\twoheadrightarrow} X^{i+1})$ kann auch jede andere Faktorisierung in einen Epi- gefolgt von einem Monomorphismus verwandt werden; cf. Bemerkung 124.(3).

Faßt man eine lang exakte Sequenz als Komplex auf im Sinne von Beispiel 94, so heißt sie auch *azyklischer Komplex.*

Beispiel 131

(1) Ist $\mathcal{A} = R$-Mod, so ist $(*)$ lang exakt, falls sie an jeder Stelle exakt ist im Sinne von Definition 47, i.e. falls $\operatorname{Im} f^{i-1} = \operatorname{Kern} f^i$ für alle $i \in \mathbf{Z}$.

Denn ist $(*)$ lang exakt, dann ist $(\dot{f}^{i-1}, \bar{f}^i)$ stets kurz exakt, also $\operatorname{Im} f^{i-1} = \operatorname{Im} \dot{f}^{i-1} = \operatorname{Kern} \bar{f}^i = \operatorname{Kern} f^i$, und somit ist $(*)$ exakt an jeder Stelle.

Ist umgekehrt $(*)$ exakt an jeder Stelle, so ist $\operatorname{Im} \dot{f}^{i-1} = \operatorname{Im} f^{i-1} = \operatorname{Kern} f^i = \operatorname{Kern} \bar{f}^i$, also $(\dot{f}^{i-1}, \bar{f}^i)$ stets kurz exakt, und somit $(*)$ lang exakt.

(2) Es ist für beliebig gegebene $T^i \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$ der Komplex

$$(\cdots \xrightarrow{d^{i-1}} X^i \xrightarrow{d^i} X^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \cdots) := (\cdots \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)} T^i \oplus T^{i+1} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)} T^{i+1} \oplus T^{i+2} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)} \cdots)$$

azyklisch, da $\mathrm{I}_{d^{i-1}} \xrightarrow{\dot{d}^{i-1}} X^i \xrightarrow{\bar{d}^i} \mathrm{I}_{d^i}$ kurz exakt ist, weil isomorph zur kurz exakten Sequenz $T^i \xrightarrow{(1\,0)} T^i \oplus T^{i+1} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)} T^{i+1}$; cf. Beispiel 126. Ein Komplex isomorph in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ zu einem dieser Form heißt *split azyklisch.*

4.5 Diagrammlemmata

Sei $\mathcal{A}$ weiterhin eine abelsche Kategorie.

4.5.1 Umfangssequenzlemma

Lemma 132 (Umfangssequenzlemma) *Sei ein komponierbares Paar von Morphismen (f, g) in der abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ gegeben. Sei i ein Kern von f, sei j ein Kern von fg und sei k ein Kern von g. Sei p ein Cokern von f, sei q ein Cokern von fg und sei r*

ein Cokern von g. Wir erhalten auf eindeutige Weise folgendes kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
 & & M \arrow[rr] \arrow[dr, "k"] & & C \arrow[ddr] & \\
 & & & Y \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "g"] & & \\
L \arrow[uurr] \arrow[rr, "j"] & & X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "fg"] & & Z \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "r"] & & D \arrow[dl] \\
 & K \arrow[ul] \arrow[ur, "i"] & & & & E &
\end{tikzcd}$$

Hierin ist die Sequenz

$$K \rightarrowtail L \longrightarrow M \longrightarrow C \longrightarrow D \twoheadrightarrow E$$

lang exakt.

Beweis. Die fragliche Sequenz existiert auf eindeutige Weise, wie man unter mehrfacher Verwendung von Bemerkung 124.(2) und einer Komposition $(M \xrightarrow{kp} C) := (M \overset{k}{\rightarrowtail} Y \overset{p}{\twoheadrightarrow} C)$ erkennt. Zu zeigen ist ihre Exaktheit.

Schreibe $h := fg$. Zunächst einmal tragen wir I_f, I_h und I_g ein, samt den Faktorisierungen $f = \bar{f}\dot{f}$, $h = \bar{h}\dot{h}$ und $g = \bar{g}\dot{g}$. Bemerkung 124.(2), zweimal angewandt, gibt uns Morphismen $\mathrm{I}_f \overset{a}{\twoheadrightarrow} \mathrm{I}_h$ und $\mathrm{I}_h \overset{b}{\rightarrowtail} \mathrm{I}_g$ mit $\bar{f}a = \bar{h}$, $b\dot{g} = \dot{h}$ und $ab = \dot{f}\bar{g}$. Trage dann ι_a und ρ_b samt den gemäß Bemerkung 124.(2) induzierten Morphismen ein. Trage die gewählte Faktorisierung von $M \xrightarrow{kp} C$ über I_{kp} ein.

Da ι_a auch Kern von $ab = \dot{f}\bar{g}$ ist, ist nach Lemma 122 der Morphismus $\mathrm{K}_a \rightarrowtail M$ ein Kern von $M \longrightarrow C$. Daher ist die Sequenz $(\mathrm{K}_a, M, \mathrm{I}_{kp})$ kurz exakt.

Es ist i ein Kern von $\bar{f}$ und j ein Kern von $\bar{h}$. Es ist $i\bar{h}\dot{h} = ih = ifg = 0$, und also $i\bar{h} = 0$. Nach Lemma 122 ist also $K \rightarrowtail L$ ein Kern von $L \longrightarrow \mathrm{I}_f$. Genauso, nach Lemma 122° ist $\mathrm{I}_f \overset{a}{\twoheadrightarrow} \mathrm{I}_h$ ein Cokern von $L \longrightarrow \mathrm{I}_f$. Nach dem Homomorphiesatz, Lemma 123, ist $L \longrightarrow \mathrm{K}_a$ epimorph. Es folgt, daß die Sequenz (K, L, K_a) kurz exakt ist.

Dual sind auch die Sequenzen $(\mathrm{I}_{kp}, C, \mathrm{C}_b)$ und (C_b, D, E) kurz exakt.

Insgesamt ist mithin die fragliche Sequenz lang exakt.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \mathrm{I}_{kp} \arrow[dr, "\bullet"] & & & \\
 & & M \arrow[ur, "/"] \arrow[rr, "kp"] \arrow[dr, "\bullet", "k"'] & & C \arrow[dr, "/"] & & \\
 & \mathrm{K}_a \arrow[ur, "\bullet"] \arrow[dr, "\bullet", "\iota_a"'] & & Y \arrow[ur, "/", "p"'] \arrow[dr, "/", "\bar{g}"'] & & \mathrm{C}_b \arrow[dr, "\bullet"] & \\
 & & \mathrm{I}_f \arrow[ur, "\bullet", "\dot{f}"'] \arrow[dr, "/", "a"'] & & \mathrm{I}_g \arrow[ur, "/", "\rho_b"'] \arrow[dr, "\bullet", "\dot{g}"'] & & \\
L \arrow[uur, "/"] \arrow[r, "\bullet", "j"'] & X \arrow[ur, "/", "\bar{f}"'] \arrow[rr, "|", "\bar{h}"'] & & \mathrm{I}_h \arrow[ur, "\bullet", "b"'] \arrow[rr, "\bullet", "\dot{h}"'] & & Z \arrow[r, "|", "q"'] \arrow[dr, "/", "r"'] & D \arrow[dl, "/"] \\
 & K \arrow[ul, "\bullet"'] \arrow[ur, "\bullet", "i"'] & & & & E &
\end{tikzcd}
$$

□

4.5.2 Pullbacks und Pushouts

Sei

$$
(*) \qquad \begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x"'] & Y \arrow[d, "y"] \\
X' \arrow[r, "f'"'] & Y'
\end{tikzcd}
$$

ein kommutatives Viereck in der abelschen Kategorie $\mathcal{A}$. Sei

$$
X \xrightarrow{(x\ f)} X' \oplus Y \xrightarrow{\binom{f'}{-y}} Y'
$$

seine *Diagonalsequenz.* Kommutativität des Vierecks $(*)$ bedeutet gerade, daß darin $(x\ f)\binom{f'}{-y} = 0$ ist.

Wir haben folgendes kommutative Diagramm.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "(x\ f)"] \arrow[d, "-1"', "\wr"] & X' \oplus Y \arrow[r, "\binom{f'}{-y}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}"', "\wr"] & Y' \arrow[d, "1"', "\wr"] \\
X \arrow[r, "(-x\ f)"] & X' \oplus Y \arrow[r, "\binom{f'}{y}"] & Y'
\end{tikzcd}
$$

Daß das erforderliche Vorzeichen in der Diagonalsequenz ausgerechnet vor y steht, spielt also keine große Rolle.

Definition 133

(1) Es ist das kommutative Viereck $(*)$ ein *Pullback,* falls es für alle s und t mit $sf' = ty$ genau ein u mit $ux = s$ und $uf = t$ gibt. Ein Pullback kann mit einem Haken wie im folgenden Diagramm als solcher gekennzeichnet werden.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dotted, "\exists! u"] \arrow[drr, bend left, "t"] \arrow[ddr, bend right, "s"'] & & \\
& X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & Y \arrow[d, "y"] \\
& X' \arrow[r, "f'"'] & Y'
\end{tikzcd}$$

(1°) Es ist das kommutative Viereck $(*)$ ein *Pushout,* falls es für alle s und t mit $fs = xt$ genau ein u mit $yu = s$ und $f'u = t$ gibt. Ein Pushout kann mit einem Haken wie im folgenden Diagramm als solcher gekennzeichnet werden.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x"'] & Y \arrow[d, "y"] \arrow[ddr, bend left, "s"] & \\
X' \arrow[r, "f'"'] \arrow[drr, bend right, "t"'] & Y' \arrow[dr, dotted, "\exists! u"] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \\
& & T
\end{tikzcd}$$

(2) Ein Viereck, das sowohl Pullback als auch Pushout ist, heißt *(bicartesisches) Quadrat.* Es kann graphisch durch ein kleines Quadrat als solches gekennzeichnet werden.

Sei i ein Kern und r ein Cokern von f. Sei i' ein Kern und r' ein Cokern von f'. Gemäß Bemerkung 124.(2) gibt es in $\mathcal{A}$ eindeutige Morphismen k mit $ki' = ix$ und c mit $rc = yr'$.

$$(**) \qquad \begin{tikzcd}
K \arrow[r, "i", "\bullet"{marking}] \arrow[d, "k"'] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x"'] & Y \arrow[r, "r", "|"{marking}] \arrow[d, "y"] & C \arrow[d, "c"] \\
K' \arrow[r, "i'"', "\bullet"{marking}] & X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[r, "r'"', "|"{marking}] & C'
\end{tikzcd}$$

Lemma 134 (Kern-Cokern-Kriterium)
Für ein kommutatives Viereck (X, X', Y, Y') wie in $(*)$ sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) *Es ist das Viereck (X, X', Y, Y') ein Pullback.*

(2) *Es ist die Diagonalsequenz $X \xrightarrow{(x\ f)} X' \oplus Y \xrightarrow{\binom{f'}{-y}} Y'$ linksexakt.*

(3) *In einer Vervollständigung wie in $(**)$ ist k ein Isomorphismus und c ein Monomorphismus.*

(4) *In jeder Vervollständigung wie in* $(**)$ *ist* k *ein Isomorphismus und* c *ein Monomorphismus.*

Insbesondere gibt es dank (2) $\Rightarrow$ (1) *für Morphismen* $X' \xrightarrow{f'} Y' \xleftarrow{y} Y$ *in* $\mathcal{A}$ *stets eine Vervollständigung zu einem Pullback.*

Zum Beispiel ist das Viereck $(\mathrm{K}_a, \mathrm{I}_f M, Y)$ aus dem Beweis zu Lemma 132 ein Pullback; ferner ist $(L, X, \mathrm{K}_a, \mathrm{I}_f)$ ein Quadrat und (L, X, M, Y) ein Pullback.

Beweis.

Ad (1) $\Rightarrow$ (2). Sei $T \xrightarrow{(s\,t)} X' \oplus Y$ mit $(s\,t)\left(\begin{smallmatrix} f' \\ -y \end{smallmatrix}\right) = 0$ gegeben. Dann ist $sf' = ty$. Also gibt es genau ein $T \xrightarrow{u} X$ mit $ux = s$ und $uf = t$, i.e. mit $u\,(x\,f) = (s\,t)$.

Ad (1) $\Leftarrow$ (2). Seien Morphismen $T \xrightarrow{s} X'$ und $T \xrightarrow{t} Y$ mit $sf' = ty$ gegeben. Dann ist $(s\,t)\left(\begin{smallmatrix} f' \\ -y \end{smallmatrix}\right) = 0$. Also gibt es genau ein $T \xrightarrow{u} X$ mit $u\,(x\,f) = (s\,t)$, i.e. mit $ux = s$ und $uf = t$.

Insbesondere gibt es, wie behauptet, für Morphismen $X' \xrightarrow{f'} Y' \xleftarrow{y} Y$ eine Vervollständigung zu einem Pullback – man verwende einen Kern von $\left(\begin{smallmatrix} f' \\ -y \end{smallmatrix}\right)$.

Ad (2) $\Rightarrow$ (4). Wir wenden das Umfangssequenzlemma auf $(1\,0)\left(\begin{smallmatrix} f' \\ -y \end{smallmatrix}\right) = f'$ an; cf. Lemma 132. Schreibe $h := -yr'$. Wir erhalten die lang exakte Sequenz

$$K' \overset{j}{\rightarrowtail} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h} C' \twoheadrightarrow \mathrm{C}_{\left(\begin{smallmatrix} f' \\ -y \end{smallmatrix}\right)} .$$

Hierin ist j durch $j\,(x\,f) = i'\,(1\,0)$ charakterisiert, i.e. durch $jx = i'$ und $jf = 0$. Es ist $kj = i$, da $kj\,(x\,f) = (ki'\,0) = (ix\,0) = i\,(x\,f)$. Da j und i beide Kerne von f sind, ist k gemäß Bemerkung 119.(2) ein Isomorphismus. Da r und $\bar{h}$ beides Cokerne von f sind, gibt es gemäß Bemerkung 119.(2°) einen Isomorphismus d mit $rd = \bar{h}$. Es ist $(-d)\dot{h} = c$, da $r(-d)\dot{h} = -\bar{h}\dot{h} = -h = yr' = rc$. Da $-d$ ein Isomorphismus und $\dot{h}$ ein Monomorphismus ist, folgt die Monomorphie von c.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, tail, "i"] \arrow[dd, "k"', "\wr"] & X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, tail, "(x\,f)"] & & Y \arrow[r, tail, "r"] \arrow[dr, tail, "\bar{h}"] \arrow[ddr, "h"] & C \arrow[d, "\wr"', "d"] \arrow[dd, bend left, "-c"] \\
 & & X' \oplus Y \arrow[ur, tail, "\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"'] \arrow[dr, "\left(\begin{smallmatrix} f' \\ -y \end{smallmatrix}\right)"] & & \mathrm{I}_h \arrow[d, tail, "\dot{h}"] \\
K' \arrow[r, tail, "i'"] & X' \arrow[ur, tail, "(1\,0)"] \arrow[rr, "f'"] & & Y' \arrow[r, tail, "r'"] \arrow[dr, tail, "\rho"'] & C' \arrow[d, tail] \\
0 \arrow[u] \arrow[ur] & & & & \mathrm{C}_{\left(\begin{smallmatrix} f' \\ -y \end{smallmatrix}\right)}
\end{tikzcd}$$

Ad (4) $\Rightarrow$ (3). Es gibt dank Bemerkung 124.(2) eine Vervollständigung wie in $(**)$.

Ad (3) $\Rightarrow$ (1). Trage in $(**)$ einen Pullback (P, Y, X', Y') ein, cf. Diagramm unten. Wir erhalten einen Morphismus $X \xrightarrow{w} P$ mit $wu = x$ und $wv = f$. Es ist zu zeigen, daß w ein Isomorphismus ist; cf. (1) $\Leftrightarrow$ (2) und Bemerkung 119.(5). Es genügt zu zeigen, daß $\mathrm{K}_w \overset{!}{\simeq} 0$ und $\mathrm{C}_w \overset{!}{\simeq} 0$; cf. Homomorphiesatz, i.e. Lemma 123.

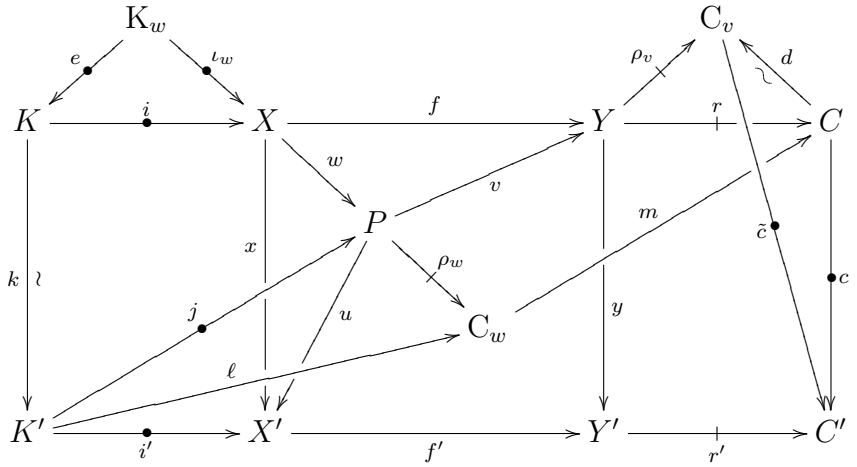
Unter Verwendung der bereits bekannten Implikation (1) $\Rightarrow$ (3) und Bemerkung 119.(5) finden wir einen Kern j von $P \xrightarrow{v} Y$ mit $ju = i'$ und einen Monomorphismus $\mathrm{C}_v \xrightarrow{\tilde{c}} C'$ mit $\rho_v\, \tilde{c} = yr'$. Es ist $kj = iw$, da $kju = ki' = ix = iwu$ und $kjv = 0 = if = iwv$, und da $\left(\begin{smallmatrix} u & v \end{smallmatrix}\right)$ monomorph ist; beachte hierzu, daß (1) $\Rightarrow$ (2) bekannt.

Wir wenden das Umfangssequenzlemma auf $wv = f$ an; cf. Lemma 132. Wir erhalten eine lang exakte Sequenz

$$\mathrm{K}_w \xrightarrow{e} K \xrightarrow[\sim]{k} K' \xrightarrow{\ell} \mathrm{C}_w \xrightarrow{m} C \xrightarrow{d} \mathrm{C}_v\,.$$

mit $ei = \iota_w$ und $\ell = j\rho_w$ und $\rho_w m = vr$ und $rd = \rho_v$. Es folgt $rd\tilde{c} = \rho_v\tilde{c} = yr' = rc$, und folglich $d\tilde{c} = c$. Mit c ist somit auch d monomorph. Insgesamt ist d ein Isomorphismus; cf. Aufgabe 47.(2). Da $\dot{m}$ ein Kern von d ist, ist $\mathrm{I}_m \simeq 0$; cf. Bemerkung 119.(3, 2). Da $\bar{\ell}$ ein Cokern des Isomorphismus k ist, ist $\mathrm{I}_\ell \simeq 0$; cf. Bemerkung 119.(3°, 2°). Die kurz exakte Sequenz $\mathrm{I}_\ell \xrightarrow{\dot{\ell}} \mathrm{C}_w \xrightarrow{\bar{m}} \mathrm{I}_m$ zeigt also, daß $0 \xrightarrow{\sim} \mathrm{I}_\ell \xrightarrow[\sim]{\dot{\ell}} \mathrm{C}_w$; cf. Bemerkung 119.(4, 2).

Ferner ist e ein Kern des Isomorphismus k, und also $\mathrm{K}_w \simeq 0$; cf. Bemerkung 119.(3, 2).



Korollar 135 *Betrachte wieder das kommutative Viereck (X, X', Y, Y') aus $(*)$ und eine Ergänzung wie in $(**)$.*

(1) *Das Viereck (X, X', Y, Y') ist genau dann ein Quadrat, wenn k und c Isomorphismen sind.*

(2) *Sei (X, X', Y, Y') ein Pullback. Es ist f' monomorph genau dann, wenn f dies ist. Ist f' epimorph, so auch f.*

(3) *Ist das Viereck (X, X', Y, Y') ein Pullback und ist f' epimorph, so ist es ein Quadrat.*

Cf. Aufgabe 52.(6).

4.5.3 Schlangenlemma

Lemma 136 (Schlangenlemma) *In $\mathcal{A}$ sei*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "m"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"] & X'' \arrow[d, "f''"] \\ Y' \arrow[r, "n"] & Y \arrow[r, "q"] & Y'' \end{tikzcd}$$

ein Morphismus von Sequenzen, i.e. seien beide Vierecke im vorstehenden Diagramm kommutativ; sei (X', X, X'') rechtsexakt und (Y', Y, Y'') linksexakt. Seien i' ein Kern und r' ein Cokern von f'. Seien i ein Kern und r ein Cokern von f. Seien i'' ein Kern und r'' ein Cokern von f''.

Dann gibt es eine lang exakte Sequenz

$$\mathrm{K}_\alpha \xrightarrow{\iota} K' \xrightarrow{\alpha} K \xrightarrow{\beta} K'' \xrightarrow{\gamma} C' \xrightarrow{\delta} C \xrightarrow{\varepsilon} C'' \xrightarrow{\rho} \mathrm{C}_\varepsilon$$

mit $\alpha i = i'm$, $\beta i'' = ip$, $r'\delta = nr$ und $r\varepsilon = qr''$.

Eine Charakterisierung des Konnektors γ *wird sich aus der Konstruktion ergeben. Cf. auch Aufgabe* 59.

$$\begin{tikzcd} & K' \arrow[r, dotted, "\alpha"] \arrow[d, "i'"'] & K \arrow[r, dotted, "\beta"] \arrow[d, "i"] & K'' \arrow[d, "i''"] \arrow[dddll, dotted, "\gamma"] \\ & X' \arrow[r, "m"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"] & X'' \arrow[d, "f''"] \\ & Y' \arrow[r, "n"] \arrow[d, "r'"'] & Y \arrow[r, "q"] \arrow[d, "r"] & Y'' \arrow[d, "r''"] \\ & C' \arrow[r, dotted, "\delta"] & C \arrow[r, dotted, "\varepsilon"] & C'' \end{tikzcd}$$

Beweis. Wähle einen Pushout (X', X, Y', T), cf. untenstehendes Diagramm. Wir erhalten einen Morphismus $T \xrightarrow{v} Y$ mit $uv = f$ und $av = n$. Mit n ist auch a monomorph. Nach Lemma 134° gibt es einen Cokern b von a mit $ub = p$.

Es ist das Viereck (T, X'', Y, Y'') kommutativ, i.e. es ist $bf'' = vq$. Denn zum einen ist $u(bf'') = pf'' = fq = u(vq)$; zum anderen ist $a(bf'') = 0 = nq = a(vq)$; ferner ist $\binom{u}{-a}$ epimorph nach Lemma 134°. Gemäß Lemma 134 ist (T, X'', Y, Y'') ein Pullback.

Da (X', X, Y', T) ein Pushout ist, gibt es einen Epimorphismus α_1 mit $\alpha_1\iota_u = i'm$; ferner gibt es einen Cokern μ von u mit $a\mu = r'$; cf. Lemma 134°.

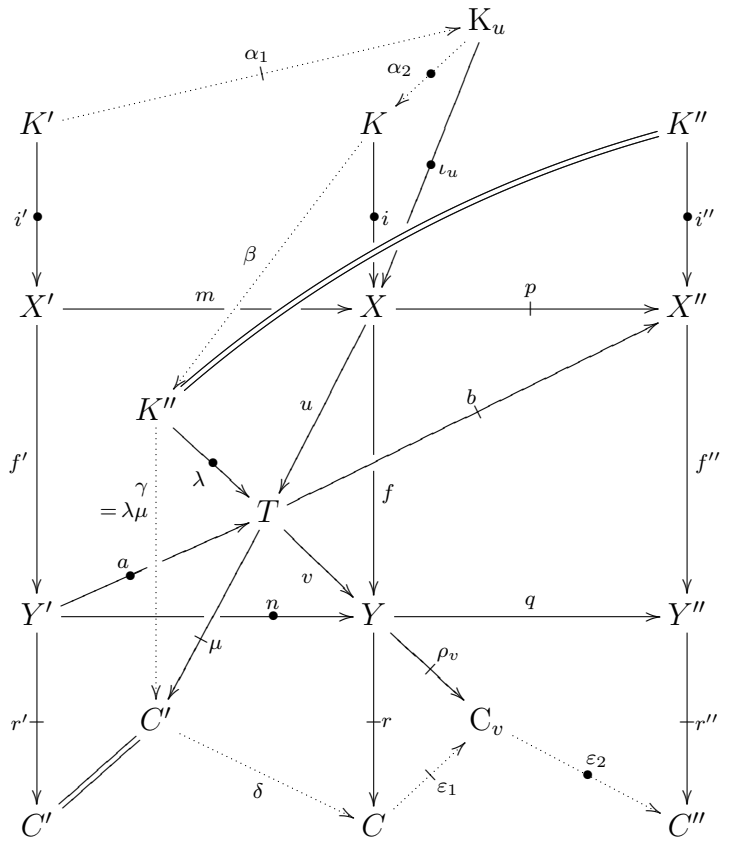
Da (T, X'', Y, Y'') ein Pullback ist, gibt es einen Monomorphismus ε_2 mit $\rho_v\varepsilon_2 = qr''$; ferner gibt es einen Kern λ von v mit $\lambda b = i''$; cf. Lemma 134.

Eine Anwendung des Umfangssequenzlemmas, Lemma 132, auf $uv = f$ gibt eine lang exakte Sequenz

$$\mathrm{K}_u \xrightarrow{\alpha_2} K \xrightarrow{\beta} K'' \xrightarrow{\gamma} C' \xrightarrow{\delta} C \xrightarrow{\varepsilon_1} \mathrm{C}_v$$

mit $\alpha_2\, i = \iota_u$, $\beta\lambda = iu$, $\gamma = \lambda\mu$, $\mu\delta = vr$ und $r\varepsilon_1 = \rho_v$.

Setze $\alpha := \alpha_1\alpha_2$ und $\varepsilon := \varepsilon_1\varepsilon_2$. Anfügen der kurz exakten Sequenzen $(\iota_\alpha\,,\ \alpha_1)$ und $(\varepsilon_2\,,\ \rho_\varepsilon)$ gibt die behauptete lang exakte Sequenz. Denn es folgt $\alpha i = \alpha_1\alpha_2 i = \alpha_1\iota_u = i'm$ und $\beta i'' = \beta\lambda b = iub = ip$ und $r'\delta = a\mu\delta = avr = nr$ und $r\varepsilon = r\varepsilon_1\varepsilon_2 = \rho_v\varepsilon_2 = qr''$.



□

4.6 Projektiv und injektiv

Sei $\mathcal{A}$ weiterhin eine abelsche Kategorie.

Definition 137 Sei $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$.

(1) Es heißt X *projektiv,* wenn ${}_{\mathcal{A}}(X, -) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{Z}\text{-Mod}$ exakt ist.

(1°) Es heißt X *injektiv,* wenn ${}_{\mathcal{A}}(-, X) : \mathcal{A}^\circ \longrightarrow \mathbf{Z}\text{-Mod}$ exakt ist.

Cf. Definition 63.

Bemerkung 138 Sei $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ gegeben. Da ${}_{\mathcal{A}}(X,-)$ gemäß Beispiel 129, i.e. Aufgabe 49, linksexakt ist, ist X projektiv genau dann, wenn ${}_{\mathcal{A}}(X,-)$ Epimorphismen in Surjektionen überführt.

In anderen Worten, es ist X projektiv genau dann, wenn für alle Epimorphismen $Y \overset{r}{\twoheadrightarrow} Y''$ und alle $X \xrightarrow{v} Y''$ ein $X \xrightarrow{u} Y$ mit $ur = v$ existiert.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, dotted, "\exists u"'] \arrow[d, "v"] \\ Y \arrow[r, two heads, "r"'] & Y'' \end{tikzcd}$$

Definition 139

(1) Es hat $\mathcal{A}$ *genügend Projektive,* wenn es für alle $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ einen Epimorphismus $P \twoheadrightarrow X$ gibt mit $P \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ projektiv.

(1°) Es hat $\mathcal{A}$ *genügend Injektive,* wenn es für alle $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ einen Monomorphismus $X \rightarrowtail I$ gibt mit $I \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ injektiv.

Beispiel 140

(1) Sei R ein Ring. Es hat R-Mod genügend Projektive und genügend Injektive; cf. Bemerkung 64.(4) und Satz 68.

(2) Sei $k \geqslant 2$ eine Primpotenz. Es hat $\mathbf{Z}/k$-mod, die volle Teilkategorie der endlichen $\mathbf{Z}/k$-Moduln in $\mathbf{Z}/k$-Mod, genügend Injektive und genügend Projektive; cf. Aufgabe 54.(4).

Bemerkung 141 *Seien $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Es ist $X \oplus Y$ projektiv genau dann, wenn X und Y projektiv sind.*

Beweis. Sei $S \overset{u}{\twoheadrightarrow} T$ in $\mathcal{A}$ gegeben. Wir haben folgendes kommutative Viereck in $\mathbf{Z}$-Mod.

$$\begin{tikzcd} {}_{\mathcal{A}}(X,S) \oplus {}_{\mathcal{A}}(Y,S) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} {}_{\mathcal{A}}(X,u) & 0 \\ 0 & {}_{\mathcal{A}}(Y,u) \end{pmatrix}"'] & {}_{\mathcal{A}}(X \oplus Y, S) \arrow[d, "{}_{\mathcal{A}}(X \oplus Y, u)"] \\ {}_{\mathcal{A}}(X,T) \oplus {}_{\mathcal{A}}(Y,T) \arrow[r, "\sim"] & {}_{\mathcal{A}}(X \oplus Y, T) \end{tikzcd}$$

Hierin ordnen die horizontalen Isomorphismen einem Paar (f,g) die Matrix $\binom{f}{g}$ zu. Also ist ${}_{\mathcal{A}}(X \oplus Y, u)$ genau dann surjektiv, wenn ${}_{\mathcal{A}}(X,u)$ und ${}_{\mathcal{A}}(Y,u)$ dies sind. ▫

Cf. Aufgabe 28.(1, 2).

Insbesondere verfügen wir über die volle additive Teilkategorie $\operatorname{Proj}\mathcal{A}$ der projektiven Objekte in $\mathcal{A}$. Dual hierzu bezeichne $\operatorname{Inj}\mathcal{A}$ die volle additive Teilkategorie der injektiven Objekte in $\mathcal{A}$.

Kapitel 5

Komplexe

Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ abelsche Kategorien.

5.1 Indizes oben und unten

In Beispiel 94 wurde die Kategorie $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ der Komplexe mit Werten in $\mathcal{A}$ definiert. Sei hier nun noch als alternative Schreibweise für die Einträge eines Komplexes X folgendes eingeführt. Für $i \in \mathbf{Z}$ schreiben wir auch $X_i := X^{-i}$ und $d = d_i^X := d_X^{-i-1}$. Es werde ferner für einen Morphismus $X \xrightarrow{f} Y$ von Komplexen auch $(f_i)_{i\in\mathbf{Z}} = (f^{-i})_{i\in\mathbf{Z}}$ geschrieben. Ein Morphismus von Komplexen ist in dieser alternativen Schreibweise ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X_{i+1} \arrow[r, "d_i^X"] \arrow[d, "f_{i+1}"] & X_i \arrow[r, "d_{i-1}^X"] \arrow[d, "f_i"] & X_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{i-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y_{i+1} \arrow[r, "d_i^Y"] & Y_i \arrow[r, "d_{i-1}^Y"] & Y_{i-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd} .$$

5.2 Homotopiekategorie

Es ist $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ eine abelsche Kategorie; cf. Aufgabe 50.(2). Sei

$$\mathrm{C}_{\mathrm{sp\,az}}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{C}(\mathcal{A})$$

die volle additive Teilkategorie der split azyklischen Komplexe; cf. Beispiel 131, Aufgabe 51.(4).

Definition 142 Sei

$$\mathrm{K}(\mathcal{A}) := \mathrm{C}(\mathcal{A})/\mathrm{C}_{\mathrm{sp\,az}}(\mathcal{A})$$

die *Homotopiekategorie* der Komplexe mit Werten in $\mathcal{A}$; cf. Definition 114. Cf. auch Aufgabe 55.

Nach Konstruktion ist $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ eine additive Kategorie; cf. Bemerkung 115.

Es ist $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ i.a. keine abelsche Kategorie, sondern eine sogenannte *triangulierte* Kategorie. Cf. auch §7.3, insbesondere Beispiel 230.(1).

5.3 Induzierte Funktoren auf Homotopiekategorien

Sei $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ ein additiver Funktor. Wir haben einen Funktor $[\![\mathbf{Z}^{\mathrm{k}}, \mathcal{A}]\!] \xrightarrow{[\![\mathbf{Z}^{\mathrm{k}}, F]\!]} [\![\mathbf{Z}^{\mathrm{k}}, \mathcal{B}]\!]$, welcher $X \in \operatorname{Ob} [\![\mathbf{Z}^{\mathrm{k}}, \mathcal{A}]\!]$ nach $F \circ X \in \operatorname{Ob} [\![\mathbf{Z}^{\mathrm{k}}, \mathcal{B}]\!]$ schickt, und $f = (fi)_{i \in \mathbf{Z}} : X \longrightarrow Y$ in $[\![\mathbf{Z}^{\mathrm{k}}, \mathcal{A}]\!]$ nach $F \circ f := (Ffi)_{i \in \mathbf{Z}} : F \circ X \longrightarrow F \circ Y$ in $[\![\mathbf{Z}^{\mathrm{k}}, \mathcal{B}]\!]$. Intuitiv gesprochen ergibt sich $[\![\mathbf{Z}^{\mathrm{k}}, F]\!]$ durch punktweises Anwenden von F.

Es ist $[\![\mathbf{Z}^{\mathrm{k}}, F]\!]$ additiv, da $F \circ 0 \simeq 0$ und da $F \circ (X \oplus Y) \xrightarrow{(F\circ\pi_1 \; F\circ\pi_2)} F \circ X \oplus F \circ Y$ isomorph ist für $X, Y \in \operatorname{Ob} [\![\mathbf{Z}^{\mathrm{k}}, \mathcal{A}]\!]$; beides, da es punktweise gilt; cf. Bemerkung 109, Aufgabe 50.(1).

Da F Komposition und Nullmorphismen respektiert, schränkt $[\![\mathbf{Z}^{\mathrm{k}}, F]\!]$ ein zu einem additiven Funktor

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{C}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\mathrm{C}(F)} & \mathrm{C}(\mathcal{B}) \\ (X \xrightarrow{f} Y) & \longmapsto & \mathrm{C}(F)(X \xrightarrow{f} Y) \;=:\; F(X \xrightarrow{f} Y) \;=\; (FX \xrightarrow{Ff} FY)\,, \end{array}$$

unter Mißbrauch von Notation. Ausgeschrieben wird

$$F\left(\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "d"] & X^i \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f^i"'] & X^{i+1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f^{i+1}"'] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, "d"] & Y^i \arrow[r, "d"] & Y^{i+1} \arrow[r, "d"] & \cdots \end{tikzcd}\right) = \left(\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "Fd"] & FX^i \arrow[r, "Fd"] \arrow[d, "Ff^i"'] & FX^{i+1} \arrow[r, "Fd"] \arrow[d, "Ff^{i+1}"'] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, "Fd"] & FY^i \arrow[r, "Fd"] & FY^{i+1} \arrow[r, "Fd"] & \cdots \end{tikzcd}\right)$$

Wegen der Additivität von F ist für X split azyklisch auch FX split azyklisch; denn aus

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "\binom{0\,0}{1\,0}"] & T^i \oplus T^{i+1} \arrow[r, "\binom{0\,0}{1\,0}"] \arrow[d, "\wr"'] & T^{i+1} \oplus T^{i+2} \arrow[r, "\binom{0\,0}{1\,0}"] \arrow[d, "\wr"'] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, "d_X^{i-1}"] & X^i \arrow[r, "d_X^i"] & X^{i+1} \arrow[r, "d_X^{i+1}"] & \cdots \end{tikzcd}$$

folgt

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "\binom{0\,0}{1\,0}"] & FT^i \oplus FT^{i+1} \arrow[r, "\binom{0\,0}{1\,0}"] \arrow[d, "\wr"'] & FT^{i+1} \oplus FT^{i+2} \arrow[r, "\binom{0\,0}{1\,0}"] \arrow[d, "\wr"'] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, "F\binom{0\,0}{1\,0}"] & F(T^i \oplus T^{i+1}) \arrow[r, "F\binom{0\,0}{1\,0}"] \arrow[d, "\wr"'] \arrow[u, "\wr"', "(F\pi_1 \; F\pi_2)"] & F(T^{i+1} \oplus T^{i+2}) \arrow[r, "F\binom{0\,0}{1\,0}"] \arrow[d, "\wr"'] \arrow[u, "\wr"', "(F\pi_1 \; F\pi_2)"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, "Fd_X^{i-1}"] & FX^i \arrow[r, "Fd_X^i"] & FX^{i+1} \arrow[r, "Fd_X^{i+1}"] & \cdots \end{tikzcd}\;;$$

cf. Bemerkung 112.

Somit schränkt $\mathrm{C}(F)$ nun weiter zu einem Funktor $\mathrm{C}_{\mathrm{sp\,az}}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\mathrm{C}_{\mathrm{sp\,az}}(F)} \mathrm{C}_{\mathrm{sp\,az}}(\mathcal{B})$ ein. Die universelle Eigenschaft der Faktorkategorie aus Bemerkung 116 liefert einen induzierten additiven Funktor $\mathrm{K}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\mathrm{K}(F)} \mathrm{K}(\mathcal{B})$, welcher sich in ein kommutatives Diagramm von Funktoren

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{C}_{\mathrm{sp\,az}}(\mathcal{A}) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathrm{C}_{\mathrm{sp\,az}}(F)"'] & \mathrm{C}(\mathcal{A}) \arrow[r, "R"] \arrow[d, "\mathrm{C}(F)"'] & \mathrm{K}(\mathcal{A}) \arrow[d, "\mathrm{K}(F)"'] \\
\mathrm{C}_{\mathrm{sp\,az}}(\mathcal{B}) \arrow[r, hook] & \mathrm{C}(\mathcal{B}) \arrow[r, "R"] & \mathrm{K}(\mathcal{B})
\end{tikzcd}$$

einfügt; denn es wird $X \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}_{\mathrm{sp\,az}}(\mathcal{A})$ unter $R \circ \mathrm{C}(F)$ abgebildet auf $R(\mathrm{C}(F)X) \simeq 0$, da auch $\mathrm{C}(F)X$ azyklisch ist.

Es operiert $\mathrm{K}(F)$ auf Objekten und auf Repräsentanten von Morphismen wie $\mathrm{C}(F)$, i.e. durch punktweises Anwenden von F.

Es ist $\mathrm{K}(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}$. Für additive Funktoren $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B} \xrightarrow{G} \mathcal{C}$ ist $\mathrm{K}(G \circ F) = \mathrm{K}(G) \circ \mathrm{K}(F)$.

5.4 Homologiefunktor

5.4.1 Auf Komplexen

Sei X in $\operatorname{Ob} \mathrm{C}(\mathcal{A})$. Sei $k \in \mathbf{Z}$. Schreibe

$$\begin{array}{rcll}
\mathrm{Z}^k X & := & \mathrm{K}_{d_X^k} & \text{(Z wie Zykel)} \\
\tilde{\mathrm{Z}}^k X & := & \mathrm{C}_{d_X^{k-1}} & \\
\mathrm{H}^k X & := & \mathrm{I}_{\iota_{d_X^k} \rho_{d_X^{k-1}}} & \text{(H wie Homologie; hierbei ist } \mathrm{Z}^k X \xrightarrow{\iota_{d_X^k}} X^k \xrightarrow{\rho_{d_X^{k-1}}} \tilde{\mathrm{Z}}^k X\text{)}
\end{array}$$

Wir schreiben $h_X^k := \iota_{d_X^k} \rho_{d_X^{k-1}} : \mathrm{Z}^k X \longrightarrow \tilde{\mathrm{Z}}^k X$ und erhalten folgendes Diagramm.

$$(*) \qquad \begin{tikzcd}
 & & & \mathrm{H}^k X \arrow[dr, "\dot{h}_X^k"] & & & \\
 & \tilde{\mathrm{Z}}^{k-1} X \arrow[r, "\hat{d}_X^{k-1}"] & \mathrm{Z}^k X \arrow[ur, "\bar{h}_X^k"] \arrow[dr, "\iota_{d_X^k}"] & & \tilde{\mathrm{Z}}^k X \arrow[r, "\hat{d}_X^k"] & \mathrm{Z}^{k+1} X \arrow[dr, "\iota_{d_X^{k+1}}"] & \\
X^{k-1} \arrow[ur, "\rho_{d_X^{k-2}}"] \arrow[rr, "d_X^{k-1}"] & & & X^k \arrow[ur, "\rho_{d_X^{k-1}}"] \arrow[rr, "d_X^k"] & & & X^{k+1}
\end{tikzcd}$$

Da nämlich $d_X^{k-1} d_X^k = 0$, faktorisiert d_X^{k-1} über $\mathrm{Z}^k X$, sagen wir als $d_X^{k-1} = \varphi\, \iota_{d_X^k}$. Da ferner $d_X^{k-2} \varphi\, \iota_{d_X^k} = d_X^{k-2} d_X^{k-1} = 0$, ist auch $d_X^{k-2} \varphi = 0$, weswegen φ über $\tilde{\mathrm{Z}}^{k-1} X$ faktorisiert, $\varphi = \rho_{d_X^{k-2}}\, \hat{d}_X^{k-1}$. Insgesamt ist also $\rho_{d_X^{k-2}}\, \hat{d}_X^{k-1}\, \iota_{d_X^k} = d_X^{k-1}$. Wegen Epimorphie des ersten und Monomorphie des dritten Faktors ist $\hat{d}_X^{k-1}$ dadurch auch festgelegt.

Wir wenden das Umfangssequenzlemma, Lemma 132, an auf $d_X^{k-1} d_X^k = 0$.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{H}^k X \arrow[dr, "\dot{h}_X^k", "\bullet"'] & & \\
 & \mathrm{Z}^k X \arrow[ur, "\bar{h}_X^k", "\times"'] \arrow[rr, "h_X^k"] \arrow[dr, "\iota_{d_X^k}", "\bullet"'] & & \tilde{\mathrm{Z}}^k X \arrow[ddr, "\hat{d}_X^k\, \iota_{d_X^{k+1}}"] & \\
 & & X^k \arrow[ur, "\rho_{d_X^{k-1}}", "\times"'] \arrow[dr, "d_X^k"] & & \\
X^{k-1} \arrow[uur, "\rho_{d_X^{k-2}}\, \hat{d}_X^{k-1}"] \arrow[rr, equal] & & X^{k-1} \arrow[uur, "d_X^{k-1}"] \arrow[rr, "0"] & & X^{k+1} \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "\rho_{d_X^k}", "\times"'] & & X^{k+1} \arrow[dl, "\rho_{d_X^k}", "\times"'] \\
 & \mathrm{Z}^{k-1} X \arrow[ul, "\iota_{d_X^{k-1}}", "\bullet"'] \arrow[ur, "\iota_{d_X^{k-1}}", "\bullet"'] & & & & \tilde{\mathrm{Z}}^{k+1} X &
\end{tikzcd}$$

Infolgedessen ist $(\rho_{d_X^{k-2}}\, \hat{d}_X^{k-1}\,,\, \bar{h}_X^k)$ rechtsexakt. Da $\rho_{d_X^{k-2}}$ epimorph ist, ist auch $(\hat{d}_X^{k-1}\,,\, \bar{h}_X^k)$ rechtsexakt. Dual ist $(\dot{h}_X^k\,,\, \hat{d}_X^k)$ linksexakt.

Bemerkung 143 *Es ist* $\mathrm{H}^k X \simeq 0$ *für alle* $k \in \mathbf{Z}$ *genau dann, wenn* X *azyklisch ist.*

Beweis.

Sei zum einen $\mathrm{H}^k X \simeq 0$ für alle $k \in \mathbf{Z}$. Aus $\mathrm{H}^k X \simeq 0$ folgt $\hat{d}_X^{k-1}$ epimorph und $\hat{d}_X^k$ monomorph. Also ist $\hat{d}_X^k$ isomorph für alle $k \in \mathbf{Z}$. Insbesondere ist $\hat{d}_X^{k-1}\, \iota_{d_X^k}$ monomorph, und also die ohnehin rechtsexakte Sequenz $(\tilde{\mathrm{Z}}^{k-1} X, X^k, \tilde{\mathrm{Z}}^k X)$ kurz exakt; cf. $(*)$. Da dies für alle $k \in \mathbf{Z}$ zutrifft, ist X azyklisch.

Sei zum anderen X azyklisch. Sei $k \in \mathbf{Z}$. Dann ist $\rho_{d_X^{k-1}}$ auch ein Cokern des Kerns $\dot{d}_X^{k-1}$ von d_X^k. Dual ist $\iota_{d_X^{k+1}}$ ein Kern des Cokerns $\bar{d}_X^{k+1}$ von d_X^k. Der Homomorphiesatz, Lemma 123, liefert nun den Isomorphismus $\hat{d}_X^k$. Da $\dot{h}_X^k$ ein Kern von $\hat{d}_X^k$ ist, folgt nun $\mathrm{H}^k X \simeq 0$. $\square$

5.4.2 Auf Morphismen von Komplexen

Das Diagramm $(*)$ in §5.4.1 ist natürlich in X. Dies bedeutet folgendes.

Seien $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} W$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ gegeben. Sei $k \in \mathbf{Z}$.

Nach Bemerkung 124.(2) gibt es $\mathrm{Z}^k X \xrightarrow{\mathrm{Z}^k f} \mathrm{Z}^k Y$ und $\tilde{\mathrm{Z}}^{k+1} X \xrightarrow{\tilde{\mathrm{Z}}^{k+1} f} \tilde{\mathrm{Z}}^{k+1} Y$ eindeutig so, daß

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Z}^k X \arrow[r, "\iota_{d_X^k}", "\bullet"'] \arrow[d, "\mathrm{Z}^k f"'] & X^k \arrow[r, "d_X^k"] \arrow[d, "f^k"'] & X^{k+1} \arrow[r, "\rho_{d_X^k}", "\times"'] \arrow[d, "f^{k+1}"] & \tilde{\mathrm{Z}}^{k+1} X \arrow[d, "\tilde{\mathrm{Z}}^{k+1} f"] \\
\mathrm{Z}^k Y \arrow[r, "\iota_{d_Y^k}", "\bullet"'] & Y^k \arrow[r, "d_Y^k"] & Y^{k+1} \arrow[r, "\rho_{d_Y^k}", "\times"'] & \tilde{\mathrm{Z}}^{k+1} Y
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Es folgt $(\mathrm{Z}^k f)(\mathrm{Z}^k g) = \mathrm{Z}^k(fg)$, da $(\mathrm{Z}^k f)(\mathrm{Z}^k g)\iota_{d_W^k} = (\mathrm{Z}^k f)\iota_{d_Y^k} g^k = \iota_{d_X^k} f^k g^k = \iota_{d_X^k}(fg)^k = \mathrm{Z}^k(fg)\iota_{d_W^k}$. Ferner ist $\mathrm{Z}^k \operatorname{id}_X = \operatorname{id}_{\mathrm{Z}^k X}$.

Dual ist auch $(\tilde{\mathrm{Z}}^{k+1} f)(\tilde{\mathrm{Z}}^{k+1} g) = \tilde{\mathrm{Z}}^{k+1}(fg)$ und $\tilde{\mathrm{Z}}^{k+1} \operatorname{id}_X = \operatorname{id}_{\tilde{\mathrm{Z}}^{k+1} X}$.

Wir haben also Funktoren

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{C}(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ (X \xrightarrow{f} Y) & \overset{\mathrm{Z}^k}{\longmapsto} & \mathrm{Z}^k(X \xrightarrow{f} Y) \\ (X \xrightarrow{f} Y) & \overset{\tilde{\mathrm{Z}}^{k+1}}{\longmapsto} & \tilde{\mathrm{Z}}^{k+1}(X \xrightarrow{f} Y) \ . \end{array}$$

Es kommutiert

$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathrm{Z}}^k X \arrow[r, "\hat{d}_X^k"] \arrow[d, "\tilde{\mathrm{Z}}^k f"'] & \mathrm{Z}^{k+1} X \arrow[d, "\mathrm{Z}^{k+1} f"] \\ \tilde{\mathrm{Z}}^k Y \arrow[r, "\hat{d}_Y^k"] & \mathrm{Z}^{k+1} Y \ , \end{tikzcd}$$

da

$$\begin{aligned} \rho_{d_X^{k-1}}(\hat{d}_X^k(\mathrm{Z}^{k+1} f))\iota_{d_Y^{k+1}} &= \rho_{d_X^{k-1}}\, \hat{d}_X^k\, \iota_{d_X^{k+1}}\, f^{k+1} \\ &= d_X^k f^{k+1} \\ &= f^k d_Y^k \\ &= f^k \rho_{d_Y^{k-1}}\, \hat{d}_Y^k\, \iota_{d_Y^{k+1}} \\ &= \rho_{d_X^{k-1}}((\tilde{\mathrm{Z}}^k f)\hat{d}_Y^k)\iota_{d_Y^{k+1}} \ . \end{aligned}$$

In anderen Worten, es ist $(\hat{d}_X^k)_{X \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}(\mathcal{A})}$ eine Transformation von $\tilde{\mathrm{Z}}^k$ nach Z^{k+1}.

Zusammensetzen der definierenden kommutativen Vierecke von $\mathrm{Z}^k f$ und von $\tilde{\mathrm{Z}}^k f$ zeigt die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Z}^k X \arrow[r, "h_X^k"] \arrow[d, "\mathrm{Z}^k f"'] & \tilde{\mathrm{Z}}^k X \arrow[d, "\tilde{\mathrm{Z}}^k f"] \\ \mathrm{Z}^k Y \arrow[r, "h_Y^k"] & \tilde{\mathrm{Z}}^k Y \ . \end{tikzcd}$$

In anderen Worten, es ist $(h_X^k)_{X \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}(\mathcal{A})}$ eine Transformation von Z^k nach $\tilde{\mathrm{Z}}^k$.

Nach Bemerkung 124.(2) gibt es $\mathrm{H}^k X \xrightarrow{\mathrm{H}^k f} \mathrm{H}^k Y$ eindeutig so, daß

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Z}^k X \arrow[r, "\bar{h}_X^k", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "\mathrm{Z}^k f"'] & \mathrm{H}^k X \arrow[r, "\dot{h}_X^k", "\bullet"{marking}] \arrow[d, "\mathrm{H}^k f"'] & \tilde{\mathrm{Z}}^k X \arrow[d, "\tilde{\mathrm{Z}}^k f"] \\ \mathrm{Z}^k Y \arrow[r, "\bar{h}_Y^k", "\shortmid"{marking}] & \mathrm{H}^k Y \arrow[r, "\dot{h}_Y^k", "\bullet"{marking}] & \tilde{\mathrm{Z}}^k Y \end{tikzcd}$$

kommutiert. Es folgt $\mathrm{H}^k(fg) = (\mathrm{H}^k f)(\mathrm{H}^k g)$, da $(\mathrm{H}^k f)(\mathrm{H}^k g)\dot{h}_W^k = (\mathrm{H}^k f)\dot{h}_Y^k(\tilde{\mathrm{Z}}^k g) = \dot{h}_X^k(\tilde{\mathrm{Z}}^k f)(\tilde{\mathrm{Z}}^k g) = \dot{h}_X^k \tilde{\mathrm{Z}}^k(fg) = \mathrm{H}^k(fg)\dot{h}_W^k$. Ferner ist $\mathrm{H}^k \operatorname{id}_X = \operatorname{id}_{\mathrm{H}^k X}$.

Wir haben so den k-ten *Homologiefunktor*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{C}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\mathrm{H}^k f} & \mathcal{A} \\ (X \xrightarrow{f} Y) & \longmapsto & \mathrm{H}^k(X \xrightarrow{f} Y) \end{array}$$

erhalten. Gemäß Aufgabe 60 ist H^k additiv.

Wir merken noch an, daß wir alternativ auch $\mathrm{H}_k := \mathrm{H}^{-k}$ für $k \in \mathbf{Z}$ schreiben; cf. §5.1.

5.4.3 Auf der Homotopiekategorie

Bemerkung 144 *Sei $k \in \mathbf{Z}$. Es gibt genau einen additiven Funktor $\mathrm{H}^k : \mathrm{K}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$ (Mißbrauch von Notation), der*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{C}(\mathcal{A}) \arrow[d, "R"'] \arrow[dr, "\mathrm{H}^k"] & \\ \mathrm{K}(\mathcal{A}) \arrow[r, "\mathrm{H}^k"'] & \mathcal{A} \end{tikzcd},$$

kommutativ macht.

Beweis. Nach Bemerkung 143 ist $\mathrm{H}^k X \simeq 0$ für alle azyklischen Komplexe $X \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}(\mathcal{A})$. Insbesondere bildet H^k jedes Objekt von $\mathrm{C}_{\mathrm{sp\,az}}(\mathcal{A})$ auf ein Nullobjekt ab. Die universelle Eigenschaft aus Bemerkung 116.(1) liefert die gewünschte Faktorisierung. □

5.4.4 Die lang exakte Homologiesequenz

Sei $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} X''$ eine kurz exakte Sequenz in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$; cf. Aufgabe 50.(2). Sei $k \in \mathbf{Z}$.

Das Schlangenlemma, Lemma 136, liefert aus

$$\begin{tikzcd} X'^{k-1} \arrow[r, tail, "i^{k-1}"] \arrow[d, "d_{X'}^{k-1}"'] & X^{k-1} \arrow[r, two heads, "r^{k-1}"] \arrow[d, "d_X^{k-1}"'] & X''^{k-1} \arrow[d, "d_{X''}^{k-1}"] \\ X'^{k} \arrow[r, tail, "i^{k}"] \arrow[d, "\rho_{d_{X'}^{k-1}}"'] & X^{k} \arrow[r, two heads, "r^{k}"] \arrow[d, "\rho_{d_X^{k-1}}"'] & X''^{k} \arrow[d, "\rho_{d_{X''}^{k-1}}"] \\ \tilde{\mathrm{Z}}^k X' \arrow[r, "\tilde{\mathrm{Z}}^k i"] & \tilde{\mathrm{Z}}^k X \arrow[r, two heads, "\tilde{\mathrm{Z}}^k r"] & \tilde{\mathrm{Z}}^k X'' \end{tikzcd}$$

die Rechtsexaktheit der Sequenz $(\tilde{\mathrm{Z}}^k i, \tilde{\mathrm{Z}}^k r)$; beachte, daß $\tilde{\mathrm{Z}}^k r$ wegen Komposition epimorph ist.

Dual die Linksexaktheit der Sequenz $(\mathrm{Z}^{k+1} i, \mathrm{Z}^{k+1} r)$.

Abermals das Schlangenlemma, Lemma 136, liefert nun folgendes Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^k X' \arrow[r, "\mathrm{H}^k i"] \arrow[d, "\dot{h}^k_{X'}"'] & \mathrm{H}^k X \arrow[r, "\mathrm{H}^k r"] \arrow[d, "\dot{h}^k_{X}"'] & \mathrm{H}^k X'' \arrow[d, "\dot{h}^k_{X''}"] \arrow[dll, dotted, "\partial^k_{(i,r)}"] \\
\tilde{\mathrm{Z}}^k X' \arrow[r, "\tilde{\mathrm{Z}}^k i"] \arrow[dd, "\hat{d}^k_{X'}"'] & \tilde{\mathrm{Z}}^k X \arrow[r, "\tilde{\mathrm{Z}}^k r"] \arrow[dd, "\hat{d}^k_{X}"'] & \tilde{\mathrm{Z}}^k X'' \arrow[dd, "\hat{d}^k_{X''}"] \\
 & & \\
\mathrm{Z}^{k+1} X' \arrow[r, "\mathrm{Z}^{k+1} i"] \arrow[d, "\bar{h}^{k+1}_{X'}"'] & \mathrm{Z}^{k+1} X \arrow[r, "\mathrm{Z}^{k+1} r"] \arrow[d, "\bar{h}^{k+1}_{X}"'] & \mathrm{Z}^{k+1} X'' \arrow[d, "\bar{h}^{k+1}_{X''}"] \\
\mathrm{H}^{k+1} X' \arrow[r, "\mathrm{H}^{k+1} i"] & \mathrm{H}^{k+1} X \arrow[r, "\mathrm{H}^{k+1} r"] & \mathrm{H}^{k+1} X''
\end{tikzcd}$$

und zeigt folgendes

Lemma 145 (lang exakte Homologiesequenz)
Die Sequenz

$$\cdots \xrightarrow{\mathrm{H}^{k-1} r} \mathrm{H}^{k-1} X'' \xrightarrow{\partial^{k-1}_{(i,r)}} \mathrm{H}^k X' \xrightarrow{\mathrm{H}^k i} \mathrm{H}^k X \xrightarrow{\mathrm{H}^k r} \mathrm{H}^k X'' \xrightarrow{\partial^k_{(i,r)}} \mathrm{H}^{k+1} X' \xrightarrow{\mathrm{H}^{k+1} i} \cdots$$

ist lang exakt.

Sei nun ein Morphismus kurz exakter Sequenzen

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[r, "r"] \arrow[d, "f"'] & X'' \arrow[d, "f''"] \\
Y' \arrow[r, "j"] & Y \arrow[r, "s"] & Y''
\end{tikzcd}$$

in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ gegeben. Wir erhalten folgendes kommutative Viereck von Sequenzen,

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{\mathrm{Z}}^k X', \tilde{\mathrm{Z}}^k X, \tilde{\mathrm{Z}}^k X'') \arrow[r, "(\hat{d}^k_{X'}, \hat{d}^k_{X}, \hat{d}^k_{X''})"] \arrow[d, "(\tilde{\mathrm{Z}}^k f', \tilde{\mathrm{Z}}^k f, \tilde{\mathrm{Z}}^k f'')"'] & (\mathrm{Z}^{k+1} X', \mathrm{Z}^{k+1} X, \mathrm{Z}^{k+1} X'') \arrow[d, "(\mathrm{Z}^{k+1} f', \mathrm{Z}^{k+1} f, \mathrm{Z}^{k+1} f'')"] \\
(\tilde{\mathrm{Z}}^k Y', \tilde{\mathrm{Z}}^k Y, \tilde{\mathrm{Z}}^k Y'') \arrow[r, "(\hat{d}^k_{Y'}, \hat{d}^k_{Y}, \hat{d}^k_{Y''})"] & (\mathrm{Z}^{k+1} Y', \mathrm{Z}^{k+1} Y, \mathrm{Z}^{k+1} Y'') \,,
\end{tikzcd}$$

die linken beiden rechts- und die rechten beiden linksexakt; cf. §5.4.2.

Bemerkung 146 *Das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\mathrm{H}^{k-1}r"] & \mathrm{H}^{k-1}X'' \arrow[r, "\partial^{k-1}_{(i,r)}"] \arrow[d, "\mathrm{H}^{k-1}f''"'] & \mathrm{H}^{k}X' \arrow[r, "\mathrm{H}^{k}i"] \arrow[d, "\mathrm{H}^{k}f'"'] & \mathrm{H}^{k}X \arrow[r, "\mathrm{H}^{k}r"] \arrow[d, "\mathrm{H}^{k}f"'] & \mathrm{H}^{k}X'' \arrow[r, "\partial^{k}_{(i,r)}"] \arrow[d, "\mathrm{H}^{k}f''"'] & \mathrm{H}^{k+1}X' \arrow[r, "\mathrm{H}^{k+1}i"] \arrow[d, "\mathrm{H}^{k+1}f'"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\mathrm{H}^{k-1}s"] & \mathrm{H}^{k-1}Y'' \arrow[r, "\partial^{k-1}_{(j,s)}"] & \mathrm{H}^{k}Y' \arrow[r, "\mathrm{H}^{k}j"] & \mathrm{H}^{k}Y \arrow[r, "\mathrm{H}^{k}s"] & \mathrm{H}^{k}Y'' \arrow[r, "\partial^{k}_{(j,s)}"] & \mathrm{H}^{k+1}Y' \arrow[r, "\mathrm{H}^{k+1}j"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis. Dies folgt aus Aufgabe 59 wegen $(\mathrm{H}^k f')\dot{h}^k_{Y'} = \dot{h}^k_{X'}(\tilde{\mathrm{Z}}^k f')$ etc. und $\bar{h}^{k+1}_{X'}(\mathrm{H}^{k+1}f') = (\mathrm{Z}^{k+1}f')\bar{h}^{k+1}_{Y'}$ etc. ▫

5.5 Auflösungsäquivalenz

Definition 147

(1) Sei die volle additive Teilkategorie $\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\mathrm{Inj}\,\mathcal{A})$ von $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ der *injektiven Auflösungen* definiert durch

$$\mathrm{Ob}\,\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\mathrm{Inj}\,\mathcal{A}) \;:=\; \{I \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{K}(\mathcal{A}) \;:\; I^i = 0 \text{ für } i \leqslant -1,\ I^i \text{ injektiv für } i \geqslant 0,\ \mathrm{H}^i I \simeq 0 \text{ für } i \geqslant 1\}\ .$$

(1°) Sei die volle additive Teilkategorie $\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\mathrm{Proj}\,\mathcal{A})$ von $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ der *projektiven Auflösungen* definiert durch

$$\mathrm{Ob}\,\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\mathrm{Proj}\,\mathcal{A}) \;:=\; \{P \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{K}(\mathcal{A}) \;:\; P_i = 0 \text{ für } i \leqslant -1,\ P_i \text{ projektiv für } i \geqslant 0,\ \mathrm{H}_i P \simeq 0 \text{ für } i \geqslant 1\}\ .$$

res wie resolution, engl. für Auflösung.

Sei $I \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\mathrm{Inj}\,\mathcal{A})$. Wegen $\mathrm{H}^k I \simeq 0$ ist der Morphismus $\tilde{\mathrm{Z}}^{k-1}I \xrightarrow{\hat{d}} \mathrm{Z}^k I$ epimorph ist für $k = 1$ und ein Isomorphismus für $k \geqslant 2$; cf. §5.4.1. Also ist $(\mathrm{Z}^{k-1}I, I^{k-1}, \mathrm{Z}^k I)$ kurz exakt für $k \geqslant 1$. Ferner ist $(\mathrm{H}^0 I, \tilde{\mathrm{Z}}^0 I, \mathrm{Z}^1 I) = (\mathrm{H}^0 I, I^0, \mathrm{Z}^1 I)$ kurz exakt; beachte $\rho_{d_I^{-1}} = 1_{I^0}$.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{H}^0 I \arrow[dr, "\dot{h}"] & & \overbrace{\mathrm{H}^1 I}^{\simeq 0} \arrow[dr, "\dot{h}"] & & \overbrace{\mathrm{H}^2 I}^{\simeq 0} \arrow[dr, "\dot{h}"] & & \overbrace{\mathrm{H}^3 I}^{\simeq 0} \arrow[dr, "\dot{h}"] & & \\
 & 0 \arrow[r, "\hat{d}"] \arrow[dd, equal, "\rho_d"'] & \mathrm{Z}^0 I \arrow[ur, "\bar{h}", "\wr"'] \arrow[dr, "\iota_d"] & I^0 \arrow[r, "\hat{d}"] \arrow[dd, equal, "\rho_d"'] & \mathrm{Z}^1 I \arrow[ur, "\bar{h}"] \arrow[dr, "\iota_d"] & \tilde{\mathrm{Z}}^1 I \arrow[r, "\hat{d}", "\sim"'] & \mathrm{Z}^2 I \arrow[ur, "\bar{h}"] \arrow[dr, "\iota_d"] & \tilde{\mathrm{Z}}^2 I \arrow[r, "\hat{d}", "\sim"'] & \mathrm{Z}^3 I \arrow[ur, "\bar{h}"] \arrow[dr, "\iota_d"] & \tilde{\mathrm{Z}}^3 I \arrow[r, "\hat{d}", "\sim"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[rr, "d"] & & I^0 \arrow[rr, "d"] & & I^1 \arrow[ur, "\rho_d"] \arrow[rr, "d"] & & I^2 \arrow[ur, "\rho_d"] \arrow[rr, "d"] & & I^3 \arrow[ur, "\rho_d"] \arrow[r, "d"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Bemerkung 148 *Sei $X \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}(\mathcal{A})$ azyklisch. Sei $J \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}(\operatorname{Inj} \mathcal{A}) \subseteq \operatorname{Ob} \mathrm{C}(\mathcal{A})$. Gebe es ein $\ell \in \mathbf{Z}$ mit $J^i = 0$ für alle $i < \ell$. Es ist $\operatorname{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(X, J) = 0$.*

Beweis. Sei $X \xrightarrow{f} J$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ gegeben. Wir haben zu zeigen, daß f in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ einen Nullmorphismus repräsentiert. Ohne Einschränkung ist $\ell = 0$.

Da $(X^{-1}, X^0, \mathrm{Z}^1 X)$ rechtsexakt ist und da $df^0 = 0$, faktorisiert $(X^0 \xrightarrow{f^0} J^0) = (X^0 \overset{\rho_d \hat{d}}{\twoheadrightarrow} \mathrm{Z}^1 X \longrightarrow J^0)$. Da $\mathrm{Z}^1 X \overset{\iota_d}{\rightarrowtail} X^1$ monomorph und J^0 injektiv ist, faktorisiert weiter $(\mathrm{Z}^1 X \longrightarrow J^0) = (\mathrm{Z}^1 X \overset{\iota_d}{\rightarrowtail} X^1 \xrightarrow{h^1} J^0)$. Halten wir fest, daß $f^0 = \rho_d \hat{d}\, \iota_d\, h^1 = dh^1$.

Da $(X^0, X^1, \mathrm{Z}^2 X)$ rechtsexakt ist und da $d(f^1 - h^1 d) = df^1 - dh^1 d = f^0 d - f^0 d = 0$, faktorisiert $(X^1 \xrightarrow{f^1 - h^1 d} J^1) = (X^1 \overset{\rho_d \hat{d}}{\twoheadrightarrow} \mathrm{Z}^2 X \longrightarrow J^1)$. Da $\mathrm{Z}^2 X \overset{\iota_d}{\rightarrowtail} X^2$ monomorph und J^1 injektiv ist, faktorisiert weiter $(\mathrm{Z}^2 X \longrightarrow J^1) = (\mathrm{Z}^2 X \overset{\iota_d}{\rightarrowtail} X^2 \xrightarrow{h^2} J^1)$. Halten wir fest, daß $f^1 = h^1 d + \rho_d\, \hat{d}\, \iota_d\, h^2 = h^1 d + dh^2$.

Da $(X^1, X^2, \mathrm{Z}^3 X)$ rechtsexakt ist und da $d(f^2 - h^2 d) = df^2 - dh^2 d = f^1 d - f^1 d + h^1 dd = 0$, faktorisiert $(X^2 \xrightarrow{f^2 - h^2 d} J^2) = (X^2 \overset{\rho_d \hat{d}}{\twoheadrightarrow} \mathrm{Z}^3 X \longrightarrow J^2)$. Da $\mathrm{Z}^3 X \overset{\iota_d}{\rightarrowtail} X^3$ monomorph und J^2 injektiv ist, faktorisiert weiter $(\mathrm{Z}^3 X \longrightarrow J^2) = (\mathrm{Z}^3 X \overset{\iota_d}{\rightarrowtail} X^3 \xrightarrow{h^3} J^2)$. Halten wir fest, daß $f^2 = h^2 d + \rho_d\, \hat{d}\, \iota_d\, h^3 = h^2 d + dh^3$.

Usf.

$$\begin{tikzcd}
X^{-1} \arrow[r, "d"] \arrow[d] & X^0 \arrow[r, two heads, "\rho_d \hat{d}"] \arrow[d, "f^0"'] & \mathrm{Z}^1 X \arrow[r, tail, dot, "\iota_d"] \arrow[dl, dotted, "h^1"] & X^1 \arrow[r, two heads, "\rho_d \hat{d}"] \arrow[d, "f^1"'] & \mathrm{Z}^2 X \arrow[r, tail, dot, "\iota_d"] \arrow[dl, dotted, "h^2"] & X^2 \arrow[r, two heads, "\rho_d \hat{d}"] \arrow[d, "f^2"'] & \mathrm{Z}^3 X \arrow[r, tail, dot, "\iota_d"] \arrow[dl, dotted, "h^3"] & X^3 \arrow[r] \arrow[d, "f^3"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & J^0 \arrow[r, "d"'] & & J^1 \arrow[r, "d"'] & & J^2 \arrow[r, "d"'] & & J^3 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Mit $h^k := 0$ für $k \leqslant 0$ wird also $f^k = h^k d + dh^{k+1}$ für alle $k \in \mathbf{Z}$. Es zeigt nun Aufgabe 55.(1), daß f in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ einen Nullmorphismus repräsentiert. □

Lemma 149 (Auflösungsäquivalenz) *Habe $\mathcal{A}$ genügend Injektive. Es ist*

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\operatorname{Inj} \mathcal{A}) & \xrightarrow{\mathrm{H}^0|_{\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\operatorname{Inj} \mathcal{A})}} & \mathcal{A} \\
(X \xrightarrow{f} Y) & \longmapsto & (\mathrm{H}^0 X \xrightarrow{\mathrm{H}^0 f} \mathrm{H}^0 Y)
\end{array}$$

eine Äquivalenz.

Beweis.

Vorbemerkung. Seien $I,\ J \in \operatorname{Ob} \mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\operatorname{Inj} \mathcal{A})$. Sei $I \xrightarrow{g} J$ ein Morphismus von Komplexen, also ein Repräsentant eines Morphismus in $\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\operatorname{Inj} \mathcal{A})$. Aus $(I^0 \overset{\rho}{\twoheadrightarrow} \tilde{\mathrm{Z}}^0 I) = (I = I)$,

dito für J, folgt, daß $\tilde{\mathrm{Z}}^0 g = g^0$. Insbesondere ist $\mathrm{H}^0 g$ durch $(\mathrm{H}^0 g)\dot{h}^0_J = \dot{h}^0_I(\tilde{\mathrm{Z}}^0 g) = \dot{h}^0_I g^0$ charakterisiert. Ende der *Vorbemerkung.*

Wir haben zu zeigen, daß $\mathrm{H}^0|_{\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\mathrm{Inj}\,\mathcal{A})}$ dicht, voll und treu ist; cf. Lemma 96.

Dicht. Sei $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ gegeben. Wähle eine kurz exakte Sequenz $X \rightarrowtail I^0 \twoheadrightarrow B^0$ mit I^0 injektiv. Wähle eine kurz exakte Sequenz $B^0 \rightarrowtail I^1 \twoheadrightarrow B^1$ mit I^1 injektiv. Usf. Sei $(I^k \xrightarrow{d} I^{k+1}) := (I^k \twoheadrightarrow B^k \rightarrowtail I^{k+1})$ für $k \geqslant 0$. Wir erhalten einen Komplex

$$I \;:=\; (\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow I^0 \xrightarrow{d} I^1 \xrightarrow{d} I^2 \xrightarrow{d} \cdots)$$

Es ist I eine injektive Auflösung. Denn für $k \geqslant 1$ kann $\mathrm{Z}^k I \overset{\iota_d}{\rightarrowtail} I^k$ isomorph durch $B^{k-1} \rightarrowtail I^k$, und $I^k \overset{\rho_d}{\twoheadrightarrow} \tilde{\mathrm{Z}}^k$ isomorph durch $I^k \twoheadrightarrow B^k$ ersetzt werden; somit ergibt sich dort $(\mathrm{Z}^k I \xrightarrow{h^k_I} \tilde{\mathrm{Z}}^k I) = (\mathrm{Z}^k I \xrightarrow{\sim} B^{k-1} \rightarrowtail I^k \twoheadrightarrow B^k \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathrm{Z}}^k I) = 0$ und mithin $\mathrm{H}^k I \simeq 0$.

Ferner sind sowohl $(\mathrm{H}^0 I, I^0, I^1)$ als auch (X, I^0, I^1) linksexakt, und somit $\mathrm{H}^0 I \simeq X$.

Voll. Seien $I,\ J \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\mathrm{Inj}\,\mathcal{A})$ und $\mathrm{H}^0 I \xrightarrow{f} \mathrm{H}^0 J$ gegeben. Wir haben ein $I \xrightarrow{g} J$ mit $f = \mathrm{H}^0 g$ zu konstruieren.

Da $\mathrm{H}^0 I \overset{\dot{h}^0_I}{\rightarrowtail} I^0$ monomorph ist und J^0 injektiv, gibt es eine Vervollständigung mit einem Morphismus $I^0 \xrightarrow{g^0} J^0$ zu einem kommutativen Viereck $(\mathrm{H}^0 I, I^0, \mathrm{H}^0 J, J^0)$. Mittels Bemerkung 124.(2) gibt es eine Vervollständigung zu einem kommutativen Viereck $(I^0, \mathrm{Z}^1 I, J^0, \mathrm{Z}^1 J)$.

Da $\mathrm{Z}^1 I \overset{\iota_d}{\rightarrowtail} I^1$ monomorph ist und J^1 injektiv, gibt es eine Vervollständigung mit einem Morphismus $I^1 \xrightarrow{g^1} J^1$ zu einem kommutativen Viereck $(\mathrm{Z}^1 I, I^1, \mathrm{Z}^1 J, J^1)$. Mittels Bemerkung 124.(2) gibt es eine Vervollständigung zu einem kommutativen Viereck $(I^1, \mathrm{Z}^2 I, J^1, \mathrm{Z}^2 J)$.

Da $\mathrm{Z}^2 I \overset{\iota_d}{\rightarrowtail} I^2$ monomorph ist und J^2 injektiv, gibt es eine Vervollständigung mit einem Morphismus $I^2 \xrightarrow{g^2} J^2$ zu einem kommutativen Viereck $(\mathrm{Z}^2 I, I^2, \mathrm{Z}^2 J, J^2)$. Mittels Bemerkung 124.(2) gibt es eine Vervollständigung zu einem kommutativen Viereck $(I^2, \mathrm{Z}^3 I, J^2, \mathrm{Z}^3 J)$.

Usf.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^0 I \arrow[r, tail, "\dot{h}^0_I"] \arrow[d, "f"'] & I^0 \arrow[r, two heads, "\hat{d}"] \arrow[d, dotted, "g^0"'] & \mathrm{Z}^1 I \arrow[r, tail, "\iota_d"] \arrow[d, dotted] & I^1 \arrow[r, two heads, "\rho_d\hat{d}"] \arrow[d, dotted, "g^1"'] & \mathrm{Z}^2 I \arrow[r, tail, "\iota_d"] \arrow[d, dotted] & I^2 \arrow[r, two heads, "\rho_d\hat{d}"] \arrow[d, dotted, "g^2"'] & \mathrm{Z}^3 I \arrow[r, tail, "\iota_d"] \arrow[d, dotted] & \cdots \\
\mathrm{H}^0 J \arrow[r, tail, "\dot{h}^0_J"'] & J^0 \arrow[r, two heads, "\hat{d}"'] & \mathrm{Z}^1 J \arrow[r, tail, "\iota_d"'] & J^1 \arrow[r, two heads, "\rho_d\hat{d}"'] & \mathrm{Z}^2 J \arrow[r, tail, "\iota_d"'] & J^2 \arrow[r, two heads, "\rho_d\hat{d}"'] & \mathrm{Z}^3 J \arrow[r, tail, "\iota_d"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Nach Vorbemerkung folgt $(\mathrm{H}^0 g)\dot{h}^0_J = \dot{h}^0_I g^0 = f\dot{h}^0_J$ und also $\mathrm{H}^0 g = f$. Somit repräsentiert g ein Urbild von f unter $\mathrm{H}^0|_{\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\mathrm{Inj}\,\mathcal{A})}$.

Treu. Dank der Additivität von H^0 aus Aufgabe 60 genügt es zu zeigen, daß für einen Repräsentanten $I \xrightarrow{g} J$ eines Morphismus in $\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\mathrm{Inj}\,\mathcal{A})$ mit $\mathrm{H}^0 g = 0$ bereits g einen Nullmorphismus repräsentiert; cf. Bemerkung 111.

Nach Vorbemerkung ist $\dot{h}_I^0 g^0 = (\mathrm{H}^0 g)\dot{h}_J^0 = 0$. Also faktorisiert g in folgende Morphismen in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & I^0 \arrow[r, "d"] \arrow[d, equal] & I^1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, equal] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^0 I \arrow[r, "\dot{h}_I^0"] \arrow[d] & I^0 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "g^0"'] & I^1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "g^1"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & J^0 \arrow[r, "d"] & J^1 \arrow[r, "d"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Hierbei ist der mittlere Komplex azyklisch wegen $(\mathrm{H}^0 I, I^0, \mathrm{Z}^0 I)$ kurz exakt und $(\mathrm{Z}^{k-1} I, I^{k-1}, \mathrm{Z}^k I)$ kurz exakt für $k \geqslant 2$.

Dank Bemerkung 148 repräsentiert zweiterer einen Nullmorphismus in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$. Also repräsentiert auch g einen Nullmorphismus in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$, und somit auch in $\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\mathrm{Inj}\,\mathcal{A})$. $\square$

Ohne den Übergang zur Homotopiekategorie hätte man Treuheit nicht zeigen können.

Definition 150

(1) Hat $\mathcal{A}$ genügend Injektive, so wählen wir einen Funktor $\mathcal{A} \xrightarrow{\mathrm{IRes}} \mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\mathrm{Inj}\,\mathcal{A})$ mit $\mathrm{H}^0|_{\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\mathrm{Inj}\,\mathcal{A})} \circ \mathrm{IRes} \simeq \mathrm{id}$ und $\mathrm{IRes} \circ \mathrm{H}^0|_{\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\mathrm{Inj}\,\mathcal{A})} \simeq \mathrm{id}$, was dank Lemma 149 möglich ist.

Als Äquivalenz ist IRes additiv; cf. Aufgabe 56.(2, 4).

Unter Mißbrauch der Bezeichnung schreiben wir dann auch $(\mathcal{A} \xrightarrow{\mathrm{IRes}} \mathrm{K}(\mathcal{A})) := (\mathcal{A} \xrightarrow{\mathrm{IRes}} \mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\mathrm{Inj}\,\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathrm{K}(\mathcal{A}))$.

(1°) Hat $\mathcal{A}$ genügend Projektive, so wählen wir einen Funktor $\mathcal{A} \xrightarrow{\mathrm{PRes}} \mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\mathrm{Proj}\,\mathcal{A})$ mit $\mathrm{H}_0|_{\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\mathrm{Proj}\,\mathcal{A})} \circ \mathrm{PRes} \simeq \mathrm{id}$ und $\mathrm{PRes} \circ \mathrm{H}_0|_{\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\mathrm{Proj}\,\mathcal{A})} \simeq \mathrm{id}$, was dank Lemma 149° möglich ist.

Als Äquivalenz ist PRes additiv; cf. Aufgabe 56.(2, 4).

Unter Mißbrauch der Bezeichnung schreiben wir dann auch $(\mathcal{A} \xrightarrow{\mathrm{PRes}} \mathrm{K}(\mathcal{A})) := (\mathcal{A} \xrightarrow{\mathrm{PRes}} \mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\mathrm{Proj}\,\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathrm{K}(\mathcal{A}))$.

Um $\mathrm{IRes}\,X$ für $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ bis auf Isomorphie zu berechnen, verwenden wir folgende Bemerkung, sowie die Argumente in Lemma 149 für die Dichtheit und die Vollheit.

Bemerkung 151 *Habe $\mathcal{A}$ genügend Injektive.*

(1) *Sei $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Sei $I \in \operatorname{Ob}\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\operatorname{Inj}\mathcal{A})$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

(i) *Es ist $I \simeq \operatorname{IRes} X$ in $\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\operatorname{Inj}\mathcal{A})$.*

(ii) *Es ist $\mathrm{H}^0 I \simeq X$ in $\mathcal{A}$.*

(iii) *Es gibt eine linksexakte Sequenz $X \rightarrowtail I^0 \xrightarrow{d} I^1$.*

Diesenfalls heißt I eine injektive Auflösung von X .

(2) *Sei $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathcal{A}$. Sei $I \xrightarrow{g} J$ ein Repräsentant eines Morphismus in $\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\operatorname{Inj}\mathcal{A})$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

(i) *Es ist $(I \xrightarrow{g} J)$ isomorph zu $\operatorname{IRes}(X \xrightarrow{f} Y)$ als Diagramme in $\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\operatorname{Inj}\mathcal{A})$ ([4]).*

(ii) *Es ist $\mathrm{H}^0(I \xrightarrow{g} J)$ isomorph zu $(X \xrightarrow{f} Y)$ als Diagramme in $\mathcal{A}$ ([4]).*

(iii) *Es gibt ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail] \arrow[d, "f"'] & I^0 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "g^0"'] & I^1 \arrow[d, "g^1"'] \\ Y \arrow[r, tail] & J^0 \arrow[r, "d"] & J^1 \end{tikzcd}$$

mit (X, I^0, I^1) und (Y, J^0, J^1) linksexakt.

Diesenfalls heißt $(I \xrightarrow{g} J)$ eine injektive Auflösung von $(X \xrightarrow{f} Y)$.

Cf. auch Bem. 90. Dual hierzu die Begriffe der *projektiven Auflösung von* Objekten und Morphismen.

Beweis. Es kann (1) als der Spezialfall von (2) mit $f = \mathrm{id}$ und $g = \mathrm{id}$ angesehen werden.

Zu (2).

(i) $\Rightarrow$ (ii). Sei $(I \xrightarrow{g} J)$ isomorph zu $\operatorname{IRes}(X \xrightarrow{f} Y)$. Dann ist $\mathrm{H}^0(I \xrightarrow{g} J)$ isomorph zu $\mathrm{H}^0 \operatorname{IRes}(X \xrightarrow{f} Y)$, was wiederum isomorph zu $(X \xrightarrow{f} Y)$ ist.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Sei $\mathrm{H}^0(I \xrightarrow{g} J)$ isomorph ist zu $(X \xrightarrow{f} Y)$. Dann ist $\operatorname{IRes}(X \xrightarrow{f} Y)$ isomorph zu $\operatorname{IRes}\mathrm{H}^0(I \xrightarrow{g} J)$, was wiederum isomorph zu $(I \xrightarrow{g} J)$ ist.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii). ([5]). Es ist $\mathrm{H}^0(I \xrightarrow{g} J)$ isomorph zu $\mathrm{Z}^0(I \xrightarrow{g} J)$, also zu einem Kern von $(I^0 \xrightarrow{g^0} J^0) \longrightarrow (I^1 \xrightarrow{g^1} J^1)$. Und es gibt eine linksexakte Sequenz $(X \xrightarrow{f} Y) \rightarrowtail (I^0 \xrightarrow{g^0} J^0) \longrightarrow (I^1 \xrightarrow{g^1} J^1)$ genau dann, wenn $(X \xrightarrow{f} Y)$ isomorph zu $\mathrm{Z}^0(I \xrightarrow{g} J)$ ist. $\square$

[4] I.e. in $[\![\Delta_1, \mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\operatorname{Inj}\mathcal{A})]\!]$ resp. in $[\![\Delta_1, \mathcal{A}]\!]$, wobei $\Delta_1 = \{0,1\}^{\mathrm{k}}$; cf. Aufgabe 37.(1); vulgo, es gibt ein kommutatives Viereck mit den beiden in Frage stehenden Morphismen horizontal und zwei Isomorphismen vertikal.

[5] Wir argumentieren in der abelschen Kategorie $[\![\Delta_1, \mathcal{A}]\!]$; cf. Aufgabe 50.(2).

Beispiel 152 Sei $\mathcal{A} = \mathbf{Z}/16\text{-mod}$; cf. Aufgabe 54. Es ist

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Z}/16 \arrow[r, "8"] \arrow[d, "2"'] & \mathbf{Z}/16 \arrow[r, "2"] \arrow[d, "1"'] & \mathbf{Z}/16 \arrow[r, "8"] \arrow[d, "2"'] & \mathbf{Z}/16 \arrow[r, "2"] \arrow[d, "1"'] & \cdots \\
\mathbf{Z}/16 \arrow[r, "4"] & \mathbf{Z}/16 \arrow[r, "4"] & \mathbf{Z}/16 \arrow[r, "4"] & \mathbf{Z}/16 \arrow[r, "4"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

eine injektive Auflösung von $\mathbf{Z}/8 \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/4$, da wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Z}/8 \arrow[r, tail, "2"] \arrow[d, "1"'] & \mathbf{Z}/16 \arrow[r, "8"] \arrow[d, "2"'] & \mathbf{Z}/16 \arrow[d, "1"'] \\
\mathbf{Z}/4 \arrow[r, tail, "4"] & \mathbf{Z}/16 \arrow[r, "4"] & \mathbf{Z}/16
\end{tikzcd}$$

mit linksexakten Zeilen haben.

5.6 Hufeisenlemma

Eine kurz exakte Sequenz $U' \overset{m}{\rightarrowtail} U \overset{p}{\twoheadrightarrow} U''$ in $\mathcal{A}$ ist split kurz exakt, falls m eine Coretraktion ist, oder, äquivalent hierzu, falls p eine Retraktion ist, oder, äquivalent hierzu, falls die Sequenz $U' \overset{m}{\rightarrowtail} U \overset{p}{\twoheadrightarrow} U''$ isomorph ist zur *Standardsequenz* $U' \overset{(1\,0)}{\rightarrowtail} U' \oplus U'' \overset{\binom{0}{1}}{\twoheadrightarrow} U''$ mittels eines Isomorphismus der Form $(1_{U'}\,,\, a\,,\, 1_{U''})$; cf. Beispiel 126, Aufgabe 51.(2).

Eine Sequenz $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} X''$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ heißt *punktweise split kurz exakt,* falls die Sequenz (i^k, r^k) split kurz exakt ist für alle $k \in \mathbf{Z}$. Diesenfalls heißt i auch *punktweise split monomorph* und r *punktweise split epimorph.*

Eine punktweise split kurz exakte Sequenz in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ ist nicht notwendig split kurz exakt in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$, wie das Beispiel

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & X \arrow[d] \\
X \arrow[r, equal] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{tikzcd}$$

für ein $X \not\simeq 0$ in $\operatorname{Ob}\mathcal{A}$ zeigt; vertikal durch Nullen ergänzt zu denken. In der Tat ist der linke Morphismus keine Coretraktion.

Punktweises isomorphes Ersetzen der Objekte des mittleren Komplexes zeigt, daß eine punktweise split kurz exakte Sequenz in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ isomorph ist zu einer, in welcher (i^k, r^k) eine Standardsequenz ist für alle $k \in \mathbf{Z}$.

Lemma 153 (Hufeisenlemma) *Habe $\mathcal{A}$ genügend Injektive. Sei $X' \overset{i}{\bullet\!\!\to} X \overset{r}{\to\!\!\!\!+} X''$ eine kurz exakte Sequenz in $\mathcal{A}$. Sei I' eine injektive Auflösung von X'; wähle $X' \overset{\varphi'}{\underset{\sim}{\to}} \mathrm{H}^0 I'$ in $\mathcal{A}$. Sei I'' eine injektive Auflösung von X''; wähle $X'' \overset{\varphi''}{\underset{\sim}{\to}} \mathrm{H}^0 I''$ in $\mathcal{A}$.*

Es gibt eine punktweise split kurz exakte Sequenz $I' \overset{j}{\bullet\!\!\to} I \overset{s}{\to\!\!\!\!+} I''$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ mit einer weiteren injektiven Auflösung I und einem $X \overset{\varphi}{\underset{\sim}{\to}} \mathrm{H}^0 I$ in $\mathcal{A}$ so, daß folgendes Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^0 I' \arrow[r, "\mathrm{H}^0 j"] & \mathrm{H}^0 I \arrow[r, "\mathrm{H}^0 s"] & \mathrm{H}^0 I'' \\
X' \arrow[u, "\varphi'", "\wr"'] \arrow[r, "i"] & X \arrow[u, "\varphi", "\wr"'] \arrow[r, "r"] & X'' \arrow[u, "\varphi''", "\wr"']
\end{tikzcd}$$

Insbesondere ist

$$(I' \overset{j}{\bullet\!\!\to} I \overset{s}{\to\!\!\!\!+} I'') \;\simeq\; \mathrm{IRes}(X' \overset{i}{\bullet\!\!\to} X \overset{r}{\to\!\!\!\!+} X'')\,.$$

als Diagramme in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$.

Eine solche Sequenz $I' \overset{j}{\bullet\!\!\to} I \overset{s}{\to\!\!\!\!+} I''$ heißt auch injektive Hufeisenauflösung *von $X' \overset{i}{\bullet\!\!\to} X \overset{r}{\to\!\!\!\!+} X''$ bezüglich φ' und φ''.*

Dual der Begriff einer *projektiven Hufeisenauflösung* einer kurz exakten Sequenz in $\mathcal{A}$.

Beweis. Sei $e' := \varphi' \dot{h}^0_I : X' \longrightarrow I'^0$. Es ist $X' \overset{e'}{\bullet\!\!\to} I'^0 \overset{d}{\longrightarrow} I'^1$ linksexakt. Schreibe $\hat{I}'$ für den aus I' durch Ersetzung von $0 \longrightarrow I'^0$ durch $X' \overset{e'}{\bullet\!\!\to} I'^0$ entstehenden Komplex. Es ist $\hat{I}'$ azyklisch, da $\mathrm{H}^k \hat{I}' = \mathrm{H}^k I' \simeq 0$ für $k \geqslant 1$, da

$$(\mathrm{Z}^0 \hat{I}' \overset{\bar{h}^0_{\hat{I}'}}{\longrightarrow} \tilde{\mathrm{Z}}^0 \hat{I}') \;=\; (\mathrm{Z}^0 \hat{I}' \overset{\sim}{\longrightarrow} X \overset{e'}{\bullet\!\!\to} I'^0 \overset{\rho}{\to\!\!\!\!+} \tilde{\mathrm{Z}}^0 \hat{I}') \;=\; 0$$

und da $\mathrm{H}^{-1} \hat{I}' \simeq 0$ wegen e' monomorph.

Sei $e'' := \varphi'' \dot{h}^0_I : X'' \longrightarrow I''^0$. Es ist $X'' \overset{e''}{\bullet\!\!\to} I''^0 \overset{d}{\longrightarrow} I''^1$ linksexakt. Schreibe $\hat{I}''$ für den aus I'' durch Ersetzung von $0 \longrightarrow I''^0$ durch $X'' \overset{e''}{\bullet\!\!\to} I''^0$ entstehenden Komplex. Es ist $\hat{I}''$ azyklisch.

Wir konstruieren untenstehende Sequenz von Komplexen, wobei die Komplexe horizontal dargestellt werden und nach links durch Nullen ergänzt zu denken sind. Der obere Komplex ist $\hat{I}'$, der untere $\hat{I}''$. Vertikal werden Standardsequenzen eingetragen.

Wir wollen Differentiale für den mittleren Komplex konstruieren.

Sei hierzu $\hat{e}'$ gewählt mit $i\hat{e}' = e'$, möglich wegen i monomorph und I'^0 injektiv. Trage $\left(\begin{smallmatrix} \hat{e}' & re'' \end{smallmatrix}\right) : X \longrightarrow I'^0 \oplus I''^0$ ein. Setze die Differentiale des mittleren Komplexes als von der Form $d = \left(\begin{smallmatrix} d & 0 \\ w^k & d \end{smallmatrix}\right) : I'^k \oplus I''^k \longrightarrow I'^{k+1} \oplus I''^{k+1}$ an für $k \geqslant 0$. Dann kommutieren alle Vierecke im untenstehenden Diagramm, unabhängig von der noch zu erfolgenden Wahl der w^k.

Es muß nun $w^0 : I''^0 \longrightarrow I'^1$ so gewählt werden, daß $\left(\begin{smallmatrix} \hat{e}' & re'' \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} d & 0 \\ w^0 & d \end{smallmatrix}\right) = 0$, i.e. daß $\hat{e}'d + re''w^0 = 0$. Da $i(-\hat{e}'d) = -e'd = 0$, gibt es ein $v^0 : X'' \longrightarrow I'^1$ mit $rv^0 = -\hat{e}'d$.

Da e'' monomorph und I'^1 injektiv ist, gibt es ein $w^0 : I''^0 \longrightarrow I'^1$ mit $e''w^0 = v^0$. Es folgt $re''w^0 = rv^0 = -\hat{e}'d$, wie gewünscht.

Es muß nun $w^1 : I''^1 \longrightarrow I'^2$ so gewählt werden, daß $\begin{pmatrix} d & 0 \\ w^0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & 0 \\ w^1 & d \end{pmatrix} = 0$, i.e. daß $w^0 d + dw^1 = 0$. Da $re''(-w^0 d) = \hat{e}'dd = 0$ und da $(re'', \bar{d})$ rechtsexakt ist, gibt es ein v^1 mit $\bar{d}v^1 = -w^0 d$. Da $\dot{d}$ monomorph und I'^2 injektiv ist, können wir $v^1 = \dot{d}w^1$ faktorisieren. Insgesamt ergibt sich also $dw^1 = \bar{d}\dot{d}w^1 = \bar{d}v^1 = -w^0 d$, wie gewünscht.

Es muß nun $w^2 : I''^2 \longrightarrow I'^3$ so gewählt werden, daß $\begin{pmatrix} d & 0 \\ w^1 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & 0 \\ w^2 & d \end{pmatrix} = 0$, i.e. daß $w^1 d + dw^2 = 0$. Da $d(-w^1 d) = w^0 dd = 0$ und da $(d, \bar{d})$ rechtsexakt ist, gibt es ein v^2 mit $\bar{d}v^2 = -w^1 d$. Da $\dot{d}$ monomorph und I'^3 injektiv ist, können wir $v^2 = \dot{d}w^2$ faktorisieren. Insgesamt ergibt sich also $dw^2 = \bar{d}\dot{d}w^2 = \bar{d}v^2 = -w^1 d$, wie gewünscht.

Wie im letzten Schritt kann man fortsetzen.

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "e'"] \arrow[d, "i"] & I'^0 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "(1\,0)"] & I'^1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "(1\,0)"] & I'^2 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "(1\,0)"] & I'^3 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "(1\,0)"] & \cdots \\
X \arrow[r, "(\hat{e}'\ re'')"] \arrow[d, "r"] & I'^0 \oplus I''^0 \arrow[r, "\begin{pmatrix} d & 0 \\ w^0 & d \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}"] & I'^1 \oplus I''^1 \arrow[r, "\begin{pmatrix} d & 0 \\ w^1 & d \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}"] & I'^2 \oplus I''^2 \arrow[r, "\begin{pmatrix} d & 0 \\ w^2 & d \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}"] & I'^3 \oplus I''^3 \arrow[r, "\begin{pmatrix} d & 0 \\ w^3 & d \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}"] & \cdots \\
X'' \arrow[r, "e''"] & I''^0 \arrow[r, "d"] & I''^1 \arrow[r, "d"] & I''^2 \arrow[r, "d"] & I''^3 \arrow[r, "d"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Da nun $\hat{I}'$ und $\hat{I}''$ azyklisch sind und die vertikal dargestellte Sequenz von Komplexen kurz exakt ist, folgt die Azyklizität des mittleren Komplexes; cf. Aufgabe 61.(1). Insbesondere wird aus diesem nach Ersetzen von X durch 0 eine injektive Auflösung, und es ist $(X, I'^0 \oplus I''^0, I'^1 \oplus I''^1)$ linksexakt.

Schreibe $e := (\hat{e}'\ re'')$. Es sind $(X', X, X'') \xrightarrow{(e', e, e'')} (I'^0, I^0, I''^0) \xrightarrow{(d,d,d)} (I'^1, I^1, I''^1)$ und $(\mathrm{H}^0 I', \mathrm{H}^0 I, \mathrm{H}^0 I'') \xrightarrow{(\dot{h}^0_{I'}, \dot{h}^0_I, \dot{h}^0_{I''})} (I'^0, I^0, I''^0) \xrightarrow{(d,d,d)} (I'^1, I^1, I''^1)$ beide linksexakt. Also faktorisiert (e', e, e'') mittels eines Isomorphismus über $(\dot{h}^0_{I'}, \dot{h}^0_I, \dot{h}^0_{I''})$, und diese Faktorisierung ist notwendigerweise von der Form

$$(e', e, e'') \;=\; (\varphi', \varphi, \varphi'')(\dot{h}^0_{I'}, \dot{h}^0_I, \dot{h}^0_{I''})$$

mit den gegebenen Isomorphismen φ' und φ''. □

Der Name "Hufeisenlemma" rührt von der Form des zu vervollständigenden Diagramms aus der gegebenen kurz exakten Sequenz (X', X, X'') und den gegebenen beiden injektiven Auflösungen I', I'' her.

Kapitel 6

Abgeleitete Funktoren

6.1 Abgeleitete Funktoren in einer Variablen

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien. Sei $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ ein additiver Funktor.

6.1.1 Definition

Definition 154 Sei $k \in \mathbf{Z}$.

(1) Habe $\mathcal{A}$ genügend Injektive. Sei der *k-te rechtsabgeleitete Funktor* von F definiert als Kompositum

$$(\mathcal{A} \xrightarrow{\mathrm{R}^k F} \mathcal{B}) \;:=\; (\mathcal{A} \xrightarrow{\mathrm{IRes}} \mathrm{K}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\mathrm{K}(F)} \mathrm{K}(\mathcal{B}) \xrightarrow{\mathrm{H}^k} \mathcal{B})\ .$$

Es ist $\mathrm{R}^k F$ additiv; cf. Definition 150.(1), §5.3, Bemerkung 144.

Ist $k \leqslant -1$, so ist $\mathrm{R}^k F \simeq 0$.

(1°) Habe $\mathcal{A}$ genügend Projektive. Sei der *k-te linksabgeleitete Funktor* von F definiert als Kompositum

$$(\mathcal{A} \xrightarrow{\mathrm{L}_k F} \mathcal{B}) \;:=\; (\mathcal{A} \xrightarrow{\mathrm{PRes}} \mathrm{K}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\mathrm{K}(F)} \mathrm{K}(\mathcal{B}) \xrightarrow{\mathrm{H}_k} \mathcal{B})\ .$$

Es ist $\mathrm{L}_k F$ additiv; cf. Definition 150.(1°), §5.3, Bemerkung 144.

Ist $k \leqslant -1$, so ist $\mathrm{L}_k F \simeq 0$.

Bemerkung 155 Habe $\mathcal{A}$ genügend Injektive.

(1) Sei $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Um $(\mathrm{R}^k F)X$ bis auf Isomorphie zu berechnen, kann man wie folgt verfahren. Bestimme eine injektive Auflösung I von X; dann ist $I \simeq \operatorname{IRes} X$ in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$; cf. Bemerkung 151.(1). Es folgt

$$(\mathrm{R}^k F)X \;=\; \mathrm{H}^k \mathrm{K}(F) \operatorname{IRes} X \;\simeq\; \mathrm{H}^k \mathrm{K}(F) I\ .$$

(2) Sei $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathcal{A}$. Um $(\mathrm{R}^k F)(X \xrightarrow{f} Y)$ bis auf Isomorphie zu berechnen, kann man wie folgt verfahren. Bestimme eine injektive Auflösung $(I \xrightarrow{g} J)$ von $(X \xrightarrow{f} Y)$; dann ist $(I \xrightarrow{g} J) \simeq \mathrm{IRes}(X \xrightarrow{f} Y)$ als Diagramme in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$; cf. Bemerkung 151.(2). Es folgt

$$(\mathrm{R}^k F)(X \xrightarrow{f} Y) \;=\; \mathrm{H}^k\mathrm{K}(F)\,\mathrm{IRes}(X \xrightarrow{f} Y) \;\simeq\; \mathrm{H}^k\mathrm{K}(F)(I \xrightarrow{g} J)\ .$$

Definition 156 (Ext**, provisorisch)** Habe $\mathcal{A}$ genügend Injektive

Seien $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Sei $k \geqslant 0$. Setze

$$\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X,-) \;:=\; \mathrm{R}^k\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,-) \;:\; \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{Z}\text{-Mod}\ .$$

Ist R ein Ring und $\mathcal{A} = R$-Mod, so schreiben wir auch $\mathrm{Ext}^k_R(X,-) := \mathrm{Ext}^k_{R\text{-Mod}}(X,-)$.

Ext wie Extension, engl. für Erweiterung; cf. §7.1.5 unten.

Definition 157 (Tor**, provisorisch)**
Sei R ein Ring. Sei $X \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Mod}\text{-}R$. Sei $k \geqslant 0$. Setze

$$\mathrm{Tor}^R_k(X,-) \;:=\; \mathrm{L}_k(X \underset{R}{\otimes} -) \;:\; R\text{-Mod} \longrightarrow \mathbf{Z}\text{-Mod}\ .$$

Tor wie Torsion.

Diese Definitionen sind provisorisch, da $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,=)$ und $- \underset{R}{\otimes} =$ Funktoren in zwei Variablen sind und nicht einzusehen ist, warum ausgerechnet in der zweiten Variablen abzuleiten sein soll. Siehe Definition 171 und Beispiel 181 unten.

Beispiel 158 Sei $\mathcal{A} = \mathbf{Z}/16$-mod. Sei $\mathcal{B} = \mathbf{Z}$-Mod. Wir setzen Beispiel 152 fort und wollen den Morphismus

$$\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/8,\mathbf{Z}/8) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/8,1)} \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/8,\mathbf{Z}/4)$$

berechnen, i.e. wir wollen ihn isomorph durch einen in Standardform ersetzen.

Wenden wir ${}_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/8,-)$ auf die injektive Auflösung

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Z}/16 \arrow[r, "8"] \arrow[d, "2"'] & \mathbf{Z}/16 \arrow[r, "2"] \arrow[d, "1"'] & \mathbf{Z}/16 \arrow[r, "8"] \arrow[d, "2"'] & \mathbf{Z}/16 \arrow[r, "2"] \arrow[d, "1"'] & \cdots \\
\mathbf{Z}/16 \arrow[r, "4"] & \mathbf{Z}/16 \arrow[r, "4"] & \mathbf{Z}/16 \arrow[r, "4"] & \mathbf{Z}/16 \arrow[r, "4"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

von $\mathbf{Z}/8 \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/4$ aus loc. cit. an und ersetzen isomorph, so erhalten wir

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Z}/8 \arrow[r, "8"] \arrow[d, "2"'] & \mathbf{Z}/8 \arrow[r, "2"] \arrow[d, "1"'] & \mathbf{Z}/8 \arrow[r, "8"] \arrow[d, "2"'] & \mathbf{Z}/8 \arrow[r, "2"] \arrow[d, "1"'] & \cdots \\
\mathbf{Z}/8 \arrow[r, "4"] & \mathbf{Z}/8 \arrow[r, "4"] & \mathbf{Z}/8 \arrow[r, "4"] & \mathbf{Z}/8 \arrow[r, "4"] & \cdots
\end{tikzcd}\ .$$

Beachte hierzu, daß $\mathbf{Z}/8 \xrightarrow{\sim} {}_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/8, \mathbf{Z}/16)$, $z \longmapsto (1 \longmapsto 2z)$. Für $w \in \mathbf{Z}$ kommutiert damit

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Z}/8 \arrow[r, "w"] \arrow[d, "\wr"'] & \mathbf{Z}/8 \arrow[d, "\wr"'] \\
{}_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/8, \mathbf{Z}/16) \arrow[r, "{}_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/8, w)"] & {}_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/8, \mathbf{Z}/16)
\end{tikzcd} .$$

Auf diesen Morphismus von Komplexen ist nun H^2 anzuwenden. Bis auf Isomorphie erhalten wir auf Z^2 und $\tilde{\mathrm{Z}}^2$ folgendes.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Z}/8 \arrow[dr, "1"] \arrow[dd, "1"] & & \mathbf{Z}/2 \arrow[dd, "2"] \\
\mathbf{Z}/8 \arrow[rr, "2"] \arrow[dd, "1"] & & \mathbf{Z}/8 \arrow[ur, "1"] \arrow[rr, "8"] \arrow[dd, "2"] & & \mathbf{Z}/8 \arrow[dd, "1"] \\
 & \mathbf{Z}/4 \arrow[dr, "2"] & & \mathbf{Z}/4 \\
\mathbf{Z}/8 \arrow[rr, "4"] & & \mathbf{Z}/8 \arrow[ur, "1"] \arrow[rr, "4"] & & \mathbf{Z}/8
\end{tikzcd}$$

Bis auf Isomorphie ergibt sich also auf H^2 folgendes.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Z}/8 \arrow[r, "1"] \arrow[d, "1"'] & \mathbf{Z}/2 \arrow[r, "1"] \arrow[d, "1"'] & \mathbf{Z}/2 \arrow[d, "2"] \\
\mathbf{Z}/4 \arrow[r, "1"] & \mathbf{Z}/2 \arrow[r, "2"] & \mathbf{Z}/4
\end{tikzcd}$$

Also ist

$$\left(\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/8, \mathbf{Z}/8) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/8, 1)} \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/8, \mathbf{Z}/4) \right) \simeq (\mathbf{Z}/2 \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/2) .$$

6.1.2 Eigenschaften

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien. Habe $\mathcal{A}$ genügend Injektive.

Sei $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ ein additiver Funktor.

Wähle $\mathrm{id}_{\mathcal{A}} \xrightarrow[\sim]{\alpha} \mathrm{H}^0 \circ \mathrm{IRes}$.

6.1.2.1 Der nullte Rechtsabgeleitete

Definition 159 Setze

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\text{Konz}} & \mathrm{C}(\mathcal{A}) \\ \begin{pmatrix} X \\ {\scriptstyle f}\downarrow \\ Y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow X \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \\ \qquad\quad \downarrow \quad {\scriptstyle f}\downarrow \quad \downarrow \\ \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow Y \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \end{pmatrix} \end{array},$$

wobei der Eintrag f an Position 0 sitze. Es ist $\operatorname{Konz} X$ der Komplex mit Eintrag X *konzentriert* an Position 0.

Wir schreiben mißbräuchlich auch $(\mathcal{A} \xrightarrow{\text{Konz}} \mathrm{K}(\mathcal{A})) := (\mathcal{A} \xrightarrow{\text{Konz}} \mathrm{C}(\mathcal{A}) \xrightarrow{R} \mathrm{K}(\mathcal{A}))$.

Es ist $\mathrm{H}^0 \circ \mathrm{K}(F) \circ \operatorname{Konz} = F$.

Definition 160 Habe $\mathcal{A}$ genügend Injektive. Für $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$ definieren wir den Morphismus von Komplexen

$$\operatorname{Konz} X \xrightarrow{eX} \operatorname{IRes} X$$

durch die Setzung

$$\big((\operatorname{Konz} X)^0 \xrightarrow{(eX)^0} (\operatorname{IRes} X)^0\big) \;:=\; \big(X \xrightarrow[\sim]{\alpha X} \mathrm{H}^0(\operatorname{IRes} X) \xrightarrow{\dot{h}^0_{\operatorname{IRes} X}} (\operatorname{IRes} X)^0\big)$$

Sei $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathcal{A}$ gegeben. Werde $\operatorname{IRes} f$ in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ von g in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ repräsentiert. Insbesondere ist $\mathrm{H}^0 \operatorname{IRes} f = \mathrm{H}^0 g$. Wir erhalten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow[\sim]{\alpha X} & \mathrm{H}^0 \operatorname{IRes} X & \xrightarrow{\dot{h}^0_{\operatorname{IRes} X}} & (\operatorname{IRes} X)^0 \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{H}^0 \operatorname{IRes} f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g^0} \\ Y & \xrightarrow[\sim]{\alpha Y} & \mathrm{H}^0 \operatorname{IRes} Y & \xrightarrow{\dot{h}^0_{\operatorname{IRes} Y}} & (\operatorname{IRes} Y)^0 \end{array},$$

in $\mathcal{A}$, und folglich das kommutative Viereck

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Konz} X & \xrightarrow{eX} & \operatorname{IRes} X \\ {\scriptstyle \operatorname{Konz} f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \operatorname{IRes} f} \\ \operatorname{Konz} Y & \xrightarrow{eY} & \operatorname{IRes} Y \end{array}$$

in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$, das zeigt, daß $e := (eX)_{X \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}}$ eine Transformation von Konz nach IRes ist.

Da $(\dot{h}^0_{\operatorname{IRes} X}, d)$ linksexakt ist, ist auch $((eX)^0, d)$ linksexakt; cf. Vorbemerkung zum Beweis von Lemma 149.

Bemerkung 161 *Sei $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$. Sei $Y \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}(\mathcal{A})$ mit $Y^k = 0$ für $k \leqslant -1$. Sei $\operatorname{Konz} X \xrightarrow{s} Y$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ gegeben.*

Es ist $\mathrm{H}^0 s$ genau dann ein Isomorphismus, wenn $X \xrightarrow{s^0} Y^0 \xrightarrow{d} Y^1$ linksexakt ist.

Beweis. Es ist $(Y^0 \overset{\rho}{\rightarrowtail} \tilde{\mathrm{Z}}^0 Y) = (Y^0 = Y^0)$ und also $\mathrm{H}^0 Y \overset{\dot{h}^0_Y}{\bullet\!\!\rightarrow} Y^0 \xrightarrow{d} Y^1$ linksexakt. Nun ist $\dot{h}^0_{\mathrm{Konz}\,X} = 1_X$ und $\tilde{\mathrm{Z}}^0 s = s^0$. Es folgt $(\mathrm{H}^0 s)\dot{h}^0_Y = \dot{h}^0_{\mathrm{Konz}\,X}(\tilde{\mathrm{Z}}^0 s) = s^0$. Somit ist $\mathrm{H}^0 s$ ein Isomorphismus genau dann, wenn auch $X \xrightarrow{s^0} Y^0 \xrightarrow{d} Y^1$ linksexakt ist. □

Bemerkung 162 *Sei $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Es ist $\mathrm{H}^0(eX)$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Da $((eX)^0, d)$ linksexakt ist, folgt dies mit Bemerkung 161. □

Definition 163 Habe $\mathcal{A}$ genügend Injektive. Wir erhalten eine Transformation ε von F nach $\mathrm{R}^0 F$ vermöge

$$\big(FX \xrightarrow{\varepsilon X} (\mathrm{R}^0 F)X\big) \;:=\; \big(FX = \mathrm{H}^0\mathrm{K}(F)\,\mathrm{Konz}\,X \xrightarrow{\mathrm{H}^0\mathrm{K}(F)eX} \mathrm{H}^0\mathrm{K}(F)\,\mathrm{IRes}\,X = (\mathrm{R}^0 F)X\big)$$

für $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Aus der Natürlichkeit von e folgt die Natürlichkeit von ε.

Bemerkung 164 *Habe $\mathcal{A}$ genügend Injektive. Ist F linksexakt, so ist $F \xrightarrow{\varepsilon} \mathrm{R}^0 F$ eine Isotransformation.*

Beweis. Sei $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Es ist zu zeigen, daß $\varepsilon X = \mathrm{H}^0\mathrm{K}(F)(eX)$ ein Isomorphismus ist. Gemäß Bemerkung 161 genügt es zu zeigen, daß $FX \xrightarrow{F(eX)^0} F(\mathrm{IRes}\,I)^0 \xrightarrow{Fd} F(\mathrm{IRes}\,I)^1$ linksexakt ist. Dies folgt aber aus der Linksexaktheit von $((eX)^0, d)$, da F linksexakte Sequenzen in ebensolche überführt. □

6.1.2.2 Die lang exakte Sequenz

Lemma 165 *Habe $\mathcal{A}$ genügend Injektive. Weiterhin ist $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ additiv.*

Sei $X' \overset{i}{\bullet\!\!\rightarrow} X \overset{r}{\rightarrowtail} X''$ eine kurz exakte Sequenz. Wir können die folgende lang exakte $\mathrm{R}^* F$-Sequenz *konstruieren.*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (\mathrm{R}^0F)X' \arrow[r, "(\mathrm{R}^0F)i"] & (\mathrm{R}^0F)X \arrow[r, "(\mathrm{R}^0F)r"] & (\mathrm{R}^0F)X'' \arrow[dll, dotted, "\delta^0_{(i,r);F}"] \\
& (\mathrm{R}^1F)X' \arrow[r, "(\mathrm{R}^1F)i"] & (\mathrm{R}^1F)X \arrow[r, "(\mathrm{R}^1F)r"] & (\mathrm{R}^1F)X'' \arrow[dll, dotted, "\delta^1_{(i,r);F}"] \\
& (\mathrm{R}^2F)X' \arrow[r, "(\mathrm{R}^2F)i"] & (\mathrm{R}^2F)X \arrow[r, "(\mathrm{R}^2F)r"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Beweis. Sei $\operatorname{IRes} X' \overset{j}{\bullet\!\!\to} I \overset{s}{\dashrightarrow} \operatorname{IRes} X''$ eine injektive Hufeisenauflösung von $X' \overset{i}{\bullet\!\!\to} X \overset{r}{\dashrightarrow} X''$ bezüglich $\alpha X'$ und $\alpha X''$; für ein $X \xrightarrow[\sim]{\varphi} \mathrm{H}^0 I$ kommutiert folgendes Diagramm in $\mathcal{A}$; cf. Lemma 153.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^0 \operatorname{IRes} X' \arrow[r, "\mathrm{H}^0 j"] & \mathrm{H}^0 I \arrow[r, "\mathrm{H}^0 s"] & \mathrm{H}^0 \operatorname{IRes} X'' \\
X' \arrow[u, "\alpha X'", "\wr"'] \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha X'"', "\wr"] & X \arrow[u, "\varphi", "\wr"'] \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\alpha X"', "\wr"] & X'' \arrow[u, "\alpha X''", "\wr"'] \arrow[d, "\alpha X''"', "\wr"] \\
\mathrm{H}^0 \operatorname{IRes} X' \arrow[r, "\mathrm{H}^0 \operatorname{IRes} i"] & \mathrm{H}^0 \operatorname{IRes} X \arrow[r, "\mathrm{H}^0 \operatorname{IRes} r"] & \mathrm{H}^0 \operatorname{IRes} X''
\end{tikzcd}$$

Da $\mathrm{H}^0|_{\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\operatorname{Inj}\mathcal{A})}$ eine Äquivalenz ist, gibt es einen Morphismus von Komplexen $I \xrightarrow{\psi} \operatorname{IRes} X$ mit $\mathrm{H}^0\psi = \varphi^{-1}(\alpha X)$. Dieser repräsentiert einen gleichnamigen Isomorphismus in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$, welcher in ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{IRes} X' \arrow[r, "j"] \arrow[d, equal] & I \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\psi", "\wr"'] & \operatorname{IRes} X'' \arrow[d, equal] \\
\operatorname{IRes} X' \arrow[r, "\operatorname{IRes} i"] & \operatorname{IRes} X \arrow[r, "\operatorname{IRes} r"] & \operatorname{IRes} X'' \,.
\end{tikzcd}$$

in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ paßt, wie eine Anwendung der Äquivalenz $\mathrm{H}^0|_{\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\operatorname{Inj}\mathcal{A})}$ und ein Abgleich mit vorigem Diagramm zeigt.

Beachte, daß $\mathrm{K}(F)\psi$ in $\mathrm{K}(\mathcal{B})$ ebenfalls ein Isomorphismus ist. Also ist auch $\mathrm{H}^k\mathrm{K}(F)\psi$ ein Isomorphismus in $\mathcal{B}$ für $k \geqslant 0$.

Da F additiv ist und $\operatorname{IRes} X' \overset{j}{\bullet\!\!\to} I \overset{s}{\dashrightarrow} \operatorname{IRes} X''$ punktweise split kurz exakt, ist $\mathrm{C}(F)\operatorname{IRes} X' \overset{\mathrm{C}(F)j}{\bullet\!\!\to} \mathrm{C}(F)I \overset{\mathrm{C}(F)s}{\dashrightarrow} \mathrm{C}(F)\operatorname{IRes} X''$ eine punktweise split kurz exakte Sequenz in $\mathrm{C}(\mathcal{B})$, insbesondere also kurz exakt; cf. Bemerkung 112, Aufgabe 51.(1). Darauf H^k für $k \geqslant 0$ angewandt, erhalten wir mit Lemma 145 die lang exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^0\mathrm{C}(F)\operatorname{IRes} X' \xrightarrow{\mathrm{H}^0\mathrm{C}(F)j} \mathrm{H}^0\mathrm{C}(F)I \xrightarrow{\mathrm{H}^0\mathrm{C}(F)s} \mathrm{H}^0\mathrm{C}(F)\operatorname{IRes} X'' \xrightarrow{\partial^0_{(\mathrm{C}(F)j,\,\mathrm{C}(F)s)}} \mathrm{H}^1\mathrm{C}(F)\operatorname{IRes} X' \longrightarrow \cdots,$$

was dasselbe ist wie

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^0\mathrm{K}(F)\operatorname{IRes} X' \xrightarrow{\mathrm{H}^0\mathrm{K}(F)j} \mathrm{H}^0\mathrm{K}(F)I \xrightarrow{\mathrm{H}^0\mathrm{K}(F)s} \mathrm{H}^0\mathrm{K}(F)\operatorname{IRes} X'' \xrightarrow{\partial^0_{(\mathrm{C}(F)j,\,\mathrm{C}(F)s)}} \mathrm{H}^1\mathrm{K}(F)\operatorname{IRes} X' \longrightarrow \cdots,$$

und also, durch isomorphe Ersetzung entlang $\mathrm{H}^k\mathrm{K}(F)\psi$ mit dem jeweiligen $k \geqslant 0$, und mit

$$\delta^k_{(i,r);F} \;:=\; \partial^k_{(\mathrm{C}(F)j,\,\mathrm{C}(F)s)}$$

für $k \geqslant 0$, die lang exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^0\mathrm{K}(F)\operatorname{IRes} X' \xrightarrow{\mathrm{H}^0\mathrm{K}(F)\operatorname{IRes} i} \mathrm{H}^0\mathrm{K}(F)\operatorname{IRes} X \xrightarrow{\mathrm{H}^0\mathrm{K}(F)\operatorname{IRes} r} \mathrm{H}^0\mathrm{K}(F)\operatorname{IRes} X'' \xrightarrow{\delta^0_{(i,r);F}} \mathrm{H}^1\mathrm{K}(F)\operatorname{IRes} X' \longrightarrow \cdots,$$

was nur andere Bezeichnungen für unsere gesuchte Sequenz

$$0 \longrightarrow (\mathrm{R}^0F)X' \xrightarrow{(\mathrm{R}^0F)i} (\mathrm{R}^0F)X \xrightarrow{(\mathrm{R}^0F)r} (\mathrm{R}^0F)X'' \xrightarrow{\delta^0_{(i,r);F}} (\mathrm{R}^1F)X' \longrightarrow \cdots$$

sind. $\square$

Satz 166 *Sei* $X' \overset{i}{\bullet\!\!\to} X \overset{r}{\to\!\!\!\!\!+} X''$ *eine kurz exakte Sequenz in* $\mathcal{A}$.

(1) *Habe* $\mathcal{A}$ *genügend Injektive. Sei* $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ *linksexakt. Wir haben die Isotransformation* $F \xrightarrow[\sim]{\varepsilon} \mathrm{R}^0 F$ *aus Bemerkung* 164.

Wir erhalten die lang exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & FX' \arrow[r, "Fi"] & FX \arrow[r, "Fr"] & FX'' \arrow[dll, dotted, "(\varepsilon X'')\delta^0_{(i,r);F}"] \\
& (\mathrm{R}^1F)X' \arrow[r, "(\mathrm{R}^1F)i"] & (\mathrm{R}^1F)X \arrow[r, "(\mathrm{R}^1F)r"] & (\mathrm{R}^1F)X'' \arrow[dll, dotted, "\delta^1_{(i,r);F}"] \\
& (\mathrm{R}^2F)X' \arrow[r, "(\mathrm{R}^2F)i"] & (\mathrm{R}^2F)X \arrow[r, "(\mathrm{R}^2F)r"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

(1°) *Habe* $\mathcal{A}$ *genügend Projektive. Sei* $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ *rechtsexakt. Wir haben eine Isotransformation* $F \xleftarrow[\sim]{\varepsilon'} \mathrm{L}_0 F$ *aus Bemerkung* 164°.

Wir erhalten die lang exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd}
0 & FX'' \arrow[l] & FX \arrow[l, "Fr"'] & FX' \arrow[l, "Fi"'] \arrow[dll, dotted, "\delta_0^{(i,r);F}(\varepsilon' X')"] \\
& (\mathrm{L}_1F)X'' & (\mathrm{L}_1F)X \arrow[l, "(\mathrm{L}_1F)r"'] & (\mathrm{L}_1F)X' \arrow[l, "(\mathrm{L}_1F)i"'] \arrow[dll, dotted, "\delta_1^{(i,r);F}"] \\
& (\mathrm{L}_2F)X'' & (\mathrm{L}_2F)X \arrow[l, "(\mathrm{L}_2F)r"'] & \cdots \arrow[l, "(\mathrm{L}_2F)i"']
\end{tikzcd}$$

Beweis. Zu (1). Ersetze in der lang exakten Sequenz aus Lemma 165 die erste Zeile isomorph via $F \xrightarrow[\sim]{\varepsilon} \mathrm{R}^0 F$; cf. Bemerkung 164.

Zu (2). Die Konstruktion von $\delta_k^{(i,r);F}$ erfolgt dual zu der Konstruktion von $\delta^k_{(i,r);F}$ in Lemma 165. □

Bemerkung 167 *Habe* $\mathcal{A}$ *genügend Injektive. Weiterhin ist* $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ *additiv.*

Sei

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[r, "r"] \arrow[d, "f"'] & X'' \arrow[d, "f''"] \\
\tilde{X}' \arrow[r, "\tilde{i}"] & \tilde{X} \arrow[r, "\tilde{r}"] & \tilde{X}''
\end{tikzcd}$$

ein Morphismus kurz exakter Sequenzen in $\mathcal{A}$. Dann kommutiert das folgende Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & (\mathrm{R}^0F)X' \arrow[r, "(\mathrm{R}^0F)i"] \arrow[d, "(\mathrm{R}^0F)f'"'] & (\mathrm{R}^0F)X \arrow[r, "(\mathrm{R}^0F)r"] \arrow[d, "(\mathrm{R}^0F)f"'] & (\mathrm{R}^0F)X'' \arrow[r, dotted, "\delta^0_{(i,r);F}"] \arrow[d, "(\mathrm{R}^0F)f''"'] & (\mathrm{R}^1F)X' \arrow[r, "(\mathrm{R}^0F)i"] \arrow[d, "(\mathrm{R}^1F)f'"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & (\mathrm{R}^0F)\tilde{X}' \arrow[r, "(\mathrm{R}^0F)\tilde{i}"] & (\mathrm{R}^0F)\tilde{X} \arrow[r, "(\mathrm{R}^0F)\tilde{r}"] & (\mathrm{R}^0F)\tilde{X}'' \arrow[r, dotted, "\delta^0_{(\tilde{i},\tilde{r});F}"] & (\mathrm{R}^1F)\tilde{X}' \arrow[r, "(\mathrm{R}^0F)\tilde{i}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

In anderen Worten, es ist $\delta^k_{(i,r);F}((\mathrm{R}^{k+1}F)f') = ((\mathrm{R}^kF)f'')\delta^k_{(\tilde{i},\tilde{r});F}$ *für* $k \geqslant 0$.

Beweis. Wir verwenden die Notation aus dem Beweis von Lemma 165.

Sei $\operatorname{IRes} X' \overset{j}{\bullet\!\!\to} I \overset{s}{\to\!\!\!\!+} \operatorname{IRes} X''$ die in der Konstruktion der $\delta^k_{(i,r);F}$ verwandte Hufeisenauflösung von $X' \overset{i}{\bullet\!\!\to} X \overset{r}{\to\!\!\!\!+} X''$; sei $\operatorname{IRes} \tilde{X}' \overset{\tilde{j}}{\bullet\!\!\to} \tilde{I} \overset{\tilde{s}}{\to\!\!\!\!+} \operatorname{IRes} \tilde{X}''$ die in der Konstruktion der $\delta^k_{(\tilde{i},\tilde{r});F}$ verwandte Hufeisenauflösung von $\tilde{X}' \overset{\tilde{i}}{\bullet\!\!\to} \tilde{X} \overset{\tilde{r}}{\to\!\!\!\!+} \tilde{X}''$. Sei $\operatorname{IRes} X' \xrightarrow{g'} \operatorname{IRes} \tilde{X}'$ ein Repräsentant in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ von $\operatorname{IRes} f'$; sei $\operatorname{IRes} X'' \xrightarrow{g''} \operatorname{IRes} \tilde{X}''$ ein Repräsentant in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ von $\operatorname{IRes} f''$.

Nach Aufgabe 63 gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{IRes} X' \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g'"'] & I \arrow[r, "s"] \arrow[d, "g"] & \operatorname{IRes} X'' \arrow[d, "g''"] \\
\operatorname{IRes} \tilde{X}' \arrow[r, "\tilde{j}"] & \tilde{I} \arrow[r, "\tilde{s}"] & \operatorname{IRes} \tilde{X}''
\end{tikzcd}$$

in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$; verwende hierzu auf der linken Seite den Morphismus azyklischer Komplexe

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[r, "(\alpha X')\dot{h}^0_{\operatorname{IRes} X'}"] \arrow[d, "f'"] & (\operatorname{IRes} X')^0 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "g'^0"] & (\operatorname{IRes} X')^1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "g'^1"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \tilde{X}' \arrow[r, "(\alpha \tilde{X}')\dot{h}^0_{\operatorname{IRes} \tilde{X}'}"] & (\operatorname{IRes} \tilde{X}')^0 \arrow[r, "d"] & (\operatorname{IRes} \tilde{X}')^1 \arrow[r, "d"] & \cdots
\end{tikzcd},$$

entsprechend auf der rechten Seite; sowie in der oberen Zeile die kurz exakte Sequenz von azyklischen Komplexen

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[r, "(\alpha X')\dot{h}^0_{\operatorname{IRes} X'}"] \arrow[d, "i"] & (\operatorname{IRes} X')^0 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "j^0"] & (\operatorname{IRes} X')^1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "j^1"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r, "\varphi\, \dot{h}^0_I"] \arrow[d, "r"] & I^0 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "s^0"] & I^1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "s^1"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & X'' \arrow[r, "(\alpha X'')\dot{h}^0_{\operatorname{IRes} X''}"] & (\operatorname{IRes} X'')^0 \arrow[r, "d"] & (\operatorname{IRes} X'')^1 \arrow[r, "d"] & \cdots
\end{tikzcd},$$

entsprechend in der unteren.

Anwendung von $\mathrm{C}(F)$ gibt das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{C}(F)\,\mathrm{IRes}\,X' \arrow[r, "\mathrm{C}(F)j", "\bullet"{marking}] \arrow[d, "\mathrm{C}(F)g'"'] & \mathrm{C}(F)I \arrow[r, "\mathrm{C}(F)s", "|"{marking}] \arrow[d, "\mathrm{C}(F)g"] & \mathrm{C}(F)\,\mathrm{IRes}\,X'' \arrow[d, "\mathrm{C}(F)g''"] \\
\mathrm{C}(F)\,\mathrm{IRes}\,\tilde{X}' \arrow[r, "\mathrm{C}(F)\tilde{j}", "\bullet"{marking}] & \mathrm{C}(F)\tilde{I} \arrow[r, "\mathrm{C}(F)\tilde{s}", "|"{marking}] & \mathrm{C}(F)\,\mathrm{IRes}\,\tilde{X}''
\end{tikzcd}$$

mit punktweise split kurz exakten Zeilen. Bemerkung 146 gibt nun für $k \geqslant 0$ das kommutative Viereck

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^k\mathrm{C}(F)\,\mathrm{IRes}\,X'' \arrow[r, "\partial^k_{(\mathrm{C}(F)j,\,\mathrm{C}(F)s)}"] \arrow[d, "\mathrm{H}^k\mathrm{C}(F)g''"'] & \mathrm{H}^{k+1}\mathrm{C}(F)\,\mathrm{IRes}\,X' \arrow[d, "\mathrm{H}^{k+1}\mathrm{C}(F)g'"] \\
\mathrm{H}^k\mathrm{C}(F)\,\mathrm{IRes}\,\tilde{X}'' \arrow[r, "\partial^k_{(\mathrm{C}(F)\tilde{j},\,\mathrm{C}(F)\tilde{s})}"] & \mathrm{H}^{k+1}\mathrm{C}(F)\,\mathrm{IRes}\,\tilde{X}' \,,
\end{tikzcd}$$

was wegen $\mathrm{H}^k\mathrm{C}(F)g'' = \mathrm{H}^k\mathrm{K}(F)\,\mathrm{IRes}\,f'' = (\mathrm{R}^kF)f''$ und wegen $\mathrm{H}^{k+1}\mathrm{C}(F)g' = \mathrm{H}^{k+1}\mathrm{K}(F)\,\mathrm{IRes}\,f' = (\mathrm{R}^{k+1}F)f'$ nur andere Bezeichnungen sind für das verlangte kommutative Viereck

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{R}^kF)X'' \arrow[r, "\delta^k_{(i,r);F}"] \arrow[d, "(\mathrm{R}^kF)f''"'] & (\mathrm{R}^{k+1}F)X' \arrow[d, "(\mathrm{R}^{k+1}F)f'"] \\
(\mathrm{R}^kF)\tilde{X}'' \arrow[r, "\delta^k_{(\tilde{i},\tilde{r});F}"] & (\mathrm{R}^{k+1}F)\tilde{X}' \,.
\end{tikzcd}$$

□

Das Argument aus dem Beweis zu Bemerkung 167 kann man auch verwenden, um zu zeigen, daß die Definition $\delta^k_{(i,r);F} := \partial^k_{(\mathrm{C}(F)j,\,\mathrm{C}(F)s)}$ nicht von der Wahl der Hufeisenauflösung (j,s) abhängt; setze hierzu $f' = 1_{X'}$ und $f'' = 1_{X''}$, was $g' = 1_{\mathrm{IRes}\,X'}$ und $g'' = 1_{\mathrm{IRes}\,X''}$ zu nehmen ermöglicht, und verwende in der oberen und unteren Zeile die beiden zu vergleichenden Hufeisenauflösungen.

6.2 Abgeleitete Funktoren in zwei Variablen

6.2.1 Doppelkomplexe

Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie.

Ein *Doppelkomplex* mit Werten in $\mathcal{A}$ ist ein Objekt X in $[\![\mathbf{Z}^{\mathrm{k}} \times \mathbf{Z}^{\mathrm{k}}, \mathcal{A}]\!]$, welches $(i,j) \longrightarrow (i+2,j)$ und $(i,j) \longrightarrow (i,j+2)$ nach 0 abbildet für $(i,j) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$; cf. Aufgabe 37. Die volle Teilkategorie der Doppelkomplexe werde $\mathrm{CC}(\mathcal{A}) \subseteq [\![\mathbf{Z}^{\mathrm{k}} \times \mathbf{Z}^{\mathrm{k}}, \mathcal{A}]\!]$ geschrieben.

Ist $X \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{CC}(\mathcal{A})$, so schreiben wir $X^{i,j} := X(i,j)$, $d = d_X^{i,j} := X\big((i,j) \longrightarrow (i,j+1)\big)$ und $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_X^{i,j} := X\big((i,j) \longrightarrow (i+1,j)\big)$ für $(i,j) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ für die *Differentiale* von X. Es

ist also $dd = 0$, $\mathfrak{d}\mathfrak{d} = 0$ und $d\mathfrak{d} = \mathfrak{d}d$ stets.

$$X \;=\; \begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r, "d"] & X^{i+2,\,j} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\mathfrak{d}"] & X^{i+2,\,j+1} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\mathfrak{d}"] & X^{i+2,\,j+2} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\mathfrak{d}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d"] & X^{i+1,\,j} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\mathfrak{d}"] & X^{i+1,\,j+1} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\mathfrak{d}"] & X^{i+1,\,j+2} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\mathfrak{d}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d"] & X^{i,j} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\mathfrak{d}"] & X^{i,\,j+1} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\mathfrak{d}"] & X^{i,\,j+2} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\mathfrak{d}"] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u, "\mathfrak{d}"] & \vdots \arrow[u, "\mathfrak{d}"] & \vdots \arrow[u, "\mathfrak{d}"] &
\end{tikzcd}$$

Ist $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathrm{CC}(\mathcal{A})$, so schreiben wir $f^{i,j} := f(i,j)$ für $(i,j) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

Mit $\mathcal{A}$ ist auch $\mathrm{CC}(\mathcal{A})$ additiv. Ist $\mathcal{A}$ abelsch, so auch $\mathrm{CC}(\mathcal{A})$; Kerne und Cokerne sind punktweise zu bilden und mit induzierten Differentialen auszustatten. Cf. Aufgabe 50.

6.2.2 Totalkomplex

Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie. Sei $\mathrm{CC}^{\llcorner}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{CC}(\mathcal{A})$ die volle Teilkategorie der Doppelkomplexe X mit $X^{i,j} \simeq 0$ für $i < 0$ oder $j < 0$, i.e. der Doppelkomplexe *im ersten Quadranten.*

Definiere den *Totalkomplexfunktor*

$$\mathrm{CC}^{\llcorner}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\mathrm{t}} \mathrm{C}(\mathcal{A})$$

$$\begin{pmatrix} X \\ f \downarrow \\ Y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}
X^{0,0} \xrightarrow{(d\ \mathfrak{d})} X^{0,1} \oplus X^{1,0} \xrightarrow{\begin{pmatrix} d & \mathfrak{d} & 0 \\ 0 & -d & -\mathfrak{d} \end{pmatrix}} X^{0,2} \oplus X^{1,1} \oplus X^{2,0} \xrightarrow{\begin{pmatrix} d & \mathfrak{d} & 0 & 0 \\ 0 & -d & -\mathfrak{d} & 0 \\ 0 & 0 & d & \mathfrak{d} \end{pmatrix}} X^{0,3} \oplus X^{1,2} \oplus X^{2,1} \oplus X^{3,0} \longrightarrow \cdots \\
\downarrow f^{0,0} \qquad \downarrow \begin{pmatrix} f^{0,1} & \\ & f^{1,0} \end{pmatrix} \qquad \downarrow \begin{pmatrix} f^{0,2} & & \\ & f^{1,1} & \\ & & f^{2,0} \end{pmatrix} \qquad \downarrow \begin{pmatrix} f^{0,3} & & & \\ & f^{1,2} & & \\ & & f^{2,1} & \\ & & & f^{3,0} \end{pmatrix} \\
Y^{0,0} \xrightarrow{(d\ \mathfrak{d})} Y^{0,1} \oplus Y^{1,0} \xrightarrow{\begin{pmatrix} d & \mathfrak{d} & 0 \\ 0 & -d & -\mathfrak{d} \end{pmatrix}} Y^{0,2} \oplus Y^{1,1} \oplus Y^{2,0} \xrightarrow{\begin{pmatrix} d & \mathfrak{d} & 0 & 0 \\ 0 & -d & -\mathfrak{d} & 0 \\ 0 & 0 & d & \mathfrak{d} \end{pmatrix}} Y^{0,3} \oplus Y^{1,2} \oplus Y^{2,1} \oplus Y^{3,0} \longrightarrow \cdots
\end{pmatrix},$$

das Bild beginnend in Position 0 und nach links mit Nullen fortgesetzt zu lesen. Es ist t ein additiver Funktor. Ist $\mathcal{A}$ abelsch, so auch $\mathrm{CC}^{\llcorner}(\mathcal{A})$, und t ist exakt.

6.2.3 Biadditive Funktoren

Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ und $\mathcal{B}$ additive Kategorien. Ein Funktor $\mathcal{A} \times \mathcal{A}' \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ heiße *biadditiv,* falls

$$\begin{array}{rcccccccc} F(X,-) & : & \mathcal{A}' & \longrightarrow & \mathcal{B}\,, & f' & \longmapsto & F(\mathrm{id}_X\,, f') & =: \; F(X,f') \\ F(-,X') & : & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{B}\,, & f & \longmapsto & F(f, \mathrm{id}_{X'}) & =: \; F(f,X') \end{array}$$

additiv sind für alle $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ und $X' \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}'$.

Es soll "biadditiv" an "bilinear" erinnern.

Beispiel 168

(1) Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie. Es ist $\mathcal{A}^\circ \times \mathcal{A} \xrightarrow{\mathcal{A}(-,=)} \mathbf{Z}$-Mod biadditiv. Cf. Beispiel 113.(2, 3).

(2) Sei R ein Ring. Es ist Mod-$R \times R$-Mod $\xrightarrow{-\otimes_R =} \mathbf{Z}$-Mod biadditiv. Cf. Beispiel 113.(4).

Sei $\mathcal{A} \times \mathcal{A}' \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ biadditiv. Sei

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{C}(\mathcal{A}) & \times & \mathrm{C}(\mathcal{A}') & \xrightarrow{F^{\mathrm{CC}}} & \mathrm{CC}(\mathcal{B}) \\ \left(\begin{array}{c} X \\ {\scriptstyle f}\downarrow \\ Y \end{array} \right. & , & \left. \begin{array}{c} X' \\ {\scriptstyle f'}\downarrow \\ Y' \end{array} \right) & \longmapsto & \left(\begin{array}{c} F^{\mathrm{CC}}(X,X') \\ \downarrow{\scriptstyle F^{\mathrm{CC}}(f,f')} \\ F^{\mathrm{CC}}(Y,Y') \end{array} \right) \end{array}$$

definiert auf Objekten durch $F^{\mathrm{CC}}(X,X')^{i,j} := F(X^i, X'^j)$, durch $\mathfrak{d}^{i,j}_{F^{\mathrm{CC}}(X,X')} := F(d^i_X\,, X'^j)$ und durch $d^{i,j}_{F^{\mathrm{CC}}(X,X')} := F(X^i, d^j_{X'})$; auf Morphismen durch $F^{\mathrm{CC}}(f,f')^{i,j} := F(f^i, f'^j)$; wobei $(i,j) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

$$F^{\mathrm{CC}}(X,X') \;=\; \begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \\ & & {\scriptstyle F(d,X'^j)}\uparrow & & {\scriptstyle F(d,X'^{j+1})}\uparrow & & \\ \cdots & \xrightarrow{F(X^{i+1},d)} & F(X^{i+1}, X'^j) & \xrightarrow{F(X^{i+1},d)} & F(X^{i+1}, X'^{j+1}) & \xrightarrow{F(X^{i+1},d)} & \cdots \\ & & {\scriptstyle F(d,X'^j)}\uparrow & & {\scriptstyle F(d,X'^{j+1})}\uparrow & & \\ \cdots & \xrightarrow{F(X^{i},d)} & F(X^{i}, X'^j) & \xrightarrow{F(X^{i},d)} & F(X^{i}, X'^{j+1}) & \xrightarrow{F(X^{i},d)} & \cdots \\ & & {\scriptstyle F(d,X'^j)}\uparrow & & {\scriptstyle F(d,X'^{j+1})}\uparrow & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \end{array}$$

Es ist F^{CC} biadditiv; cf. §5.3.

6.2.4 Ableiten biadditiver Funktoren

Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ und $\mathcal{B}$ additive Kategorien. Sei $\mathcal{A} \times \mathcal{A}' \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ biadditiv.

Sei $\mathrm{C}^{[0}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{C}(\mathcal{A})$ die volle Teilkategorie der Komplexe X mit $X^i = 0$ für $i < 0$. Beachte, daß F^{CC} von $\mathrm{C}^{[0}(\mathcal{A}) \times \mathrm{C}^{[0}(\mathcal{A}')$ nach $\mathrm{CC}^{\llcorner}(\mathcal{B})$ einschränkt.

Sei $\mathrm{K}^{[0}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{K}(\mathcal{A})$ die volle Teilkategorie der Komplexe X mit $X^i = 0$ für $i < 0$.

Lemma 169 *Sei $X' \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}^{[0}(\mathcal{A}')$. Ist $X \xrightarrow{n} Y$ ein Morphismus in $\mathrm{C}^{[0}(\mathcal{A})$, dessen Bild in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ verschwindet, so verschwindet auch das Bild von $\mathrm{t} \circ F^{\mathrm{CC}}(n, X')$ in $\mathrm{K}(\mathcal{B})$.*

Beweis. Schreibe $n^i = dh^{i+1} + h^i d$ für $i \in \mathbf{Z}$; cf. Aufgabe 55.(1). Es folgt

$$\begin{aligned} F(n^i, X'^j) &= F(d, X'^j)F(h^{i+1}, X'^j) + F(h^i, X'^j)F(d, X'^j) \\ F(X^i, d)F(h^i, X'^{j+1}) &= F(h^i, X'^j)F(Y^{i-1}, d) \end{aligned}$$

für $i,\ j \in \mathbf{Z}$.

Schreibe $U := F^{\mathrm{CC}}(X, X')$, $V := F^{\mathrm{CC}}(Y, X')$, $g := F^{\mathrm{CC}}(n, X') : U \longrightarrow V$ und $k^{i,j} := F(h^i, X'^j) : U^{i,j} \longrightarrow V^{i-1,j}$ für $i,\ j \in \mathbf{Z}$. So wird

$$\begin{aligned} g^{i,j} &= \mathfrak{d}k^{i+1,j} + k^{i,j}\mathfrak{d} \\ dk^{i,j+1} &= k^{i,j}d\ . \end{aligned}$$

Es ist zu zeigen, daß das Bild von $\mathrm{t}g$ in $\mathrm{K}(\mathcal{B})$ verschwindet. I.e. wir suchen $H^\ell : (\mathrm{t}U)^\ell \longrightarrow (\mathrm{t}V)^{\ell-1}$ für $\ell \in \mathbf{Z}$ so, daß $(\mathrm{t}g)^\ell = dH^{\ell+1} + H^\ell d$ für $\ell \in \mathbf{Z}$; cf. Aufgabe 55.(1).

Notwendigerweise ist $H^\ell := 0$ zu setzen für $\ell \leqslant 0$. Für $\ell \geqslant 1$ setzen wir

$$H^\ell := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ +k^{1,\ell-1} & & & \\ & -k^{2,\ell-2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & (-1)^{\ell+1}k^{\ell,0} \end{pmatrix} : U^{0,\ell} \oplus \cdots \oplus U^{\ell,0} \longrightarrow V^{0,\ell-1} \oplus \cdots \oplus V^{\ell-1,0}\ .$$

Sei $\ell \geqslant 1$. Es wird

$$\begin{aligned} & dH^{\ell+1} + H^\ell d \\ = & \begin{pmatrix} d & \mathfrak{d} & & & \\ & -d & -\mathfrak{d} & & \\ & & d & \mathfrak{d} & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & \\ +k^{1,\ell} & & & \\ & -k^{2,\ell-1} & & \\ & & +k^{3,\ell-2} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \\ +k^{1,\ell-1} & & \\ & -k^{2,\ell-2} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & \mathfrak{d} & & & \\ & -d & -\mathfrak{d} & & \\ & & d & \mathfrak{d} & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} +\mathfrak{d}k^{1,\ell} & & & \\ -dk^{1,\ell} & +\mathfrak{d}k^{2,\ell-1} & & \\ & -dk^{2,\ell-1} & +\mathfrak{d}k^{3,\ell-2} & \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & & \\ k^{1,\ell-1}d & k^{1,\ell-1}\mathfrak{d} & & \\ & k^{2,\ell-2}d & k^{2,\ell-2}\mathfrak{d} & \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} g^{0,\ell} & & & \\ 0 & g^{1,\ell-1} & & \\ & 0 & g^{2,\ell-2} & \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \\ = & (\mathrm{t}g)^\ell\ . \end{aligned}$$

Bei $\ell = 0$ wird $dH^1 = \left(\begin{smallmatrix} d & \mathfrak{d} \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ k^{1,0} \end{smallmatrix}\right) = \mathfrak{d}k^{1,0} = g^{0,0} = (\mathrm{t}g)^0$. $\square$

Seien $X \underset{n}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$ in $\mathrm{C}^{[0}(\mathcal{A})$, wobei das Bild von n in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ verschwinde.

Seien $X' \underset{n'}{\overset{f'}{\rightrightarrows}} Y'$ in $\mathrm{C}^{[0}(\mathcal{A}')$, wobei das Bild von n' in $\mathrm{K}(\mathcal{A}')$ verschwinde.
Mit Lemma 169 und der dazu symmetrischen Aussage erhalten wir

$$\begin{aligned} R\mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(f+n, f'+n') &= R\mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(f+n, X')R\mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(Y, f'+n') \\ &= R\mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(f, X')R\mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(Y, f') \qquad = \quad R\mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(f, f') \ . \end{aligned}$$

Folglich gibt es eine Faktorisierung

$$\begin{tikzcd} \mathrm{C}^{[0}(\mathcal{A}) \times \mathrm{C}^{[0}(\mathcal{A}') \arrow[r, "\mathrm{t} \circ F^{\mathrm{CC}}"] \arrow[d, "R \times R"'] & \mathrm{C}(\mathcal{B}) \arrow[d, "R"] \\ \mathrm{K}^{[0}(\mathcal{A}) \times \mathrm{K}^{[0}(\mathcal{A}') \arrow[r, "F^{\mathrm{K}}"] & \mathrm{K}(\mathcal{B}) \ , \end{tikzcd}$$

wobei allgemein für Funktoren $\mathcal{C} \xrightarrow{S} \mathcal{D}$ und $\mathcal{C}' \xrightarrow{S'} \mathcal{D}'$ der Funktor $\mathcal{C} \times \mathcal{C}' \xrightarrow{S \times S'} \mathcal{D} \times \mathcal{D}'$ erklärt sei durch $(S \times S')(f, f') := (Sf, Sf')$ für einen Morphismus (f, f') in $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$.

Für $X \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}^{[0}(\mathcal{A})$ ist $F^{\mathrm{K}}(X, -) \circ R = R \circ \mathrm{t} \circ F^{\mathrm{CC}}(X, -)$ additiv. Also ist auch $F^{\mathrm{K}}(X, -)$ additiv; cf. Bemerkung 116. Zusammen mit dem symmetrischen Argument zeigt dies die Biadditivität von F^{K}.

Definition 170 Haben $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ genügend Injektive. Sei $k \geqslant 0$. Sei der *k-te rechtsabgeleitete Funktor* des biadditiven Funktors $\mathcal{A} \times \mathcal{A}' \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ definiert als

$$\left(\mathcal{A} \times \mathcal{A}' \xrightarrow{\mathrm{R}^k F} \mathcal{B}\right) \ := \ \left(\mathcal{A} \times \mathcal{A}' \xrightarrow{\mathrm{IRes} \ \times \ \mathrm{IRes}} \mathrm{K}^{[0}(\mathcal{A}) \times \mathrm{K}^{[0}(\mathcal{A}') \xrightarrow{F^{\mathrm{K}}} \mathrm{K}(\mathcal{B}) \xrightarrow{\mathrm{H}^k} \mathcal{B}\right)$$

Da IRes additiv ist, ist $\mathrm{R}^k F$ biadditiv; cf. Aufgabe 56.(2, 4), Beispiel 113.(5).

Falls $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ stattdessen genügend Projektive haben, defineren wir den *k-ten linksabgeleiteten Funktor* $\mathrm{L}_k F$ auf duale Weise.

Definition 171 (Ext **und** Tor**, endgültig)**

(1) Habe $\mathcal{A}$ genügend Injektive und genügend Projektive. Sei $k \geqslant 0$. Setze

$$\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{A}}(-, =) \ := \ \mathrm{R}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(-, =) \ : \ \mathcal{A}^\circ \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{Z}\text{-Mod} \ .$$

Für $X, Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$ ist also $\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X, Y) = \mathrm{H}^k \mathrm{t} \operatorname{Hom}^{\mathrm{CC}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{PRes}\, X, \mathrm{IRes}\, Y)$.

Beachte, daß für IRes auf $\mathcal{A}^\circ$ der Funktor PRes auf $\mathcal{A}$ verwandt werden kann.

Ist R ein Ring und $\mathcal{A} = R$-Mod, so schreiben wir auch $\mathrm{Ext}^k_R(-, =) := \mathrm{Ext}^k_{R\text{-Mod}}(-, =)$.

(2) Sei R ein Ring. Sei $k \geqslant 0$. Setze

$$\mathrm{Tor}_k^R(-,=) \;:=\; \mathrm{L}_k(- \underset{R}{\otimes} =) \;:\; \text{Mod-}R \times R\text{-Mod} \;\longrightarrow\; \mathbf{Z}\text{-Mod} \;.$$

Für $X,\, Y \in \mathrm{Ob}\, R\text{-Mod}$ ist also $\mathrm{Tor}_k^R(X,Y) = \mathrm{H}_k\mathrm{t}(\mathrm{PRes}\, X \underset{R}{\otimes}^{\mathrm{CC}} \mathrm{PRes}\, Y)$, wobei hier t der Totalkomplexfunktor auf den Doppelkomplexen im dritten Quadranten ist.

6.3 Zusammenhang Ableiten in zwei und je einer Variablen

6.3.1 Quasiisomorphismen

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien.

Definition 172 Ein Morphismus $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ heißt *Quasiisomorphismus,* wenn $\mathrm{H}^k f$ ein Isomorphismus ist für alle $k \in \mathbf{Z}$. Auch das Bild eines solchen f in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ wird als Quasiisomorphismus bezeichnet.

Bemerkung 173 *Habe $\mathcal{A}$ genügend Injektive. Es ist für $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ der Morphismus* $\mathrm{Konz}\, X \xrightarrow{eX} \mathrm{IRes}\, X$ *ein Quasiisomorphismus; cf.* §6.1.2.1.

Beweis. Gemäß Bemerkung 162 ist $\mathrm{H}^0(eX)$ ein Isomorphismus. Ferner ist $\mathrm{H}^k(eX)$ für $k \neq 0$ bereits deswegen ein Isomorphismus, da dort $\mathrm{H}^k\,\mathrm{Konz}\, X \simeq 0$ und $\mathrm{H}^k\,\mathrm{IRes}\, X \simeq 0$. ▫

Bemerkung 174 *Sei $X \xrightarrow{f} Y$ ein Quasiisomorphismus in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Sei $\mathcal{A} \xrightarrow{G} \mathcal{B}$ ein exakter Funktor. Dann ist $\mathrm{C}(G)X \xrightarrow{\mathrm{C}(G)f} \mathrm{C}(G)Y$ ein Quasiisomorphismus.*

Beweis. Siehe Aufgabe 68.(2). ▫

Bemerkung 175 *Sei*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "i", "\bullet"{marking}] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[r, "r", "+"{marking}] \arrow[d, "f"'] & X'' \arrow[d, "f''"] \\ \tilde{X}' \arrow[r, "\tilde{i}", "\bullet"{marking}] & \tilde{X} \arrow[r, "\tilde{r}", "+"{marking}] & \tilde{X}'' \end{tikzcd}$$

ein Morphismus kurz exakter Sequenzen in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Sind f' und f'' Quasiisomorphismen, so auch f.

Beweis. Anwendung der Homologiefunktoren gibt nach Bemerkung 146 für $k \in \mathbf{Z}$ folgenden Morphismus lang exakter Sequenzen, welche wir bereits in kurz exakte Sequenzen zerlegt haben und für welche wir nach Bemerkung 124.(2) die auf den Bildern induzierten Morphismen eingetragen haben.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathrm{H}^{k-1}X'' \arrow[r, tail] \arrow[d, "\mathrm{H}^{k-1}f''", "\wr"'] & \arrow[r, two heads] & \mathrm{H}^{k}X' \arrow[r, tail] \arrow[d, "a"', "\wr"] & \arrow[r, two heads] & \mathrm{H}^{k}X \arrow[r, tail] \arrow[d, "\mathrm{H}^{k}f"', "\wr"] & \arrow[r, two heads] & \mathrm{H}^{k}X'' \arrow[r, tail] \arrow[d, "c"', "\wr"] & \arrow[r, two heads] & \mathrm{H}^{k+1}X' \arrow[r] \arrow[d, "d"', "\wr"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{H}^{k-1}Y'' \arrow[r, tail] & \arrow[r, two heads] & \mathrm{H}^{k}Y' \arrow[r, tail] & \arrow[r, two heads] & \mathrm{H}^{k}Y \arrow[r, tail] & \arrow[r, two heads] & \mathrm{H}^{k}Y'' \arrow[r, tail] & \arrow[r, two heads] & \mathrm{H}^{k+1}Y' \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Dank Komposition sind a und d Isomorphismen. Das Schlangenlemma, Lemma 136, angewandt auf $(a, \mathrm{H}^k f', b)$, zeigt, daß b ein Isomorphismus ist ([6]). Dual ist c ein Isomorphismus. Das Schlangenlemma, angewandt auf $(b, \mathrm{H}^k f, c)$, zeigt, daß $\mathrm{H}^k f$ ein Isomorphismus ist. ▫

6.3.2 Zeilenweise Quasiisomorphismen

Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie.

Für einen Doppelkomplex $X \in \operatorname{Ob} \mathrm{CC}(\mathcal{A})$ und $i \in \mathbf{Z}$ schreiben wir $X^{i,*} \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}(\mathcal{A})$ für den Komplex mit $\big((X^{i,*})^j \xrightarrow{d^j_{X^{i,*}}} (X^{i,*})^{j+1}\big) := (X^{i,j} \xrightarrow{d^{i,j}_X} X^{i,j+1})$ für $j \in \mathbf{Z}$. Kurz, sei $X^{i,*}$ die i-te Zeile von X.

Für $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathrm{CC}(\mathcal{A})$ schreiben wir $f^{i,*} := (f^{i,j})_j : X^{i,*} \longrightarrow Y^{i,*}$. Kurz, $f^{i,*}$ ist die Einschränkung von f auf die i-te Zeile.

Lemma 176 *Sei $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathrm{CC}^{\llcorner}(\mathcal{A})$. Ist $X^{i,*} \xrightarrow{f^{i,*}} Y^{i,*}$ ein Quasiisomorphismus für alle $i \geqslant 0$, so ist auch $\mathrm{t}f$ ein Quasiisomorphismus.*

Kurz, ist f zeilenweise ein Quasiisomorphismus, dann auch total.

Beweis. Sei $X \xrightarrow{f} Y$ gegeben mit $X^{i,*} \xrightarrow{f^{i,*}} Y^{i,*}$ Quasiisomorphismus für alle $i \geqslant 0$.

Für $I \subseteq \mathbf{Z}$ schreiben wir $X^{I,*} \in \operatorname{Ob} \mathrm{CC}^{\llcorner}(\mathcal{A})$ für den Doppelkomplex, der aus X hervorgeht durch Ersetzen von $X^{i,j}$ durch 0 für $i \in \mathbf{Z} \smallsetminus I$ und $j \in \mathbf{Z}$. Entsprechend für f.

Wir *behaupten,* daß $\mathrm{t}(f^{[0,i]})$ ein Quasiisomorphismus ist für alle $i \geqslant -1$. Wir führen dazu eine Induktion nach $i \geqslant -1$. Für $i = -1$ ist nichts zu zeigen. Sei $i \geqslant 0$. Wir haben folgenden Morphismus kurz exakter Sequenzen von Doppelkomplexen

$$\begin{tikzcd}
X^{\{i\},*} \arrow[r] \arrow[d, "f^{\{i\},*}"] & X^{[0,i],*} \arrow[r] \arrow[d, "f^{[0,i],*}"] & X^{[0,i-1],*} \arrow[d, "f^{[0,i-1],*}"] \\
Y^{\{i\},*} \arrow[r] & Y^{[0,i]*} \arrow[r] & Y^{[0,i-1],*}
\end{tikzcd}$$

[6] Man kann auch auf den Cokernen ein Inverses induzieren lassen.

Anwendung des Totalkomplexfunktors gibt einen Morphismus kurz exakter Sequenzen von Komplexen.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{t}X^{\{i\},*} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{t}f^{\{i\},*}"] & \mathrm{t}X^{[0,i],*} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{t}f^{[0,i],*}"] & \mathrm{t}X^{[0,i-1],*} \arrow[d, "\mathrm{t}f^{[0,i-1],*}"] \\
\mathrm{t}Y^{\{i\},*} \arrow[r] & \mathrm{t}Y^{[0,i]*} \arrow[r] & \mathrm{t}Y^{[0,i-1],*}
\end{tikzcd}$$

Es ist $\mathrm{t}f^{[0,i-1],*}$ nach Induktionsvoraussetzung ein Quasiisomorphismus. Da $f^{i,*}$ ein Quasiisomorphismus ist und da $\mathrm{t}f^{\{i\},*}$ durch Verschiebung aus $f^{i,*}$ hervorgeht, ist auch $\mathrm{t}f^{\{i\},*}$ ein Quasiisomorphismus. Dank Bemerkung 175 ist also auch $\mathrm{t}f^{[0,i],*}$ ein Quasiisomorphismus, was die *Behauptung* zeigt.

Nun ist aber nach Definition des Totalkomplexes

$$\mathrm{H}^j(\mathrm{t}X \xrightarrow{\mathrm{t}f} \mathrm{t}Y) \quad = \quad \mathrm{H}^j(\mathrm{t}X^{[0,j+1],*} \xrightarrow{\mathrm{t}f^{[0,j+1],*}} \mathrm{t}Y^{[0,j+1],*})$$

für $j \geqslant 0$, da $\mathrm{t}X$ an den Positionen 0 bis $j+1$ mitsamt Differentialen dazwischen mit $\mathrm{t}X^{[0,j+1],*}$ übereinstimmt, entsprechend für Y, da $\mathrm{t}f$ an den Positionen 0 bis $j+1$ mit $\mathrm{t}f^{[0,j+1],*}$ übereinstimmt und da für die Berechnung der Homologie an der Stelle j nur die Positionen $j-1$, j und $j+1$ eine Rolle spielen. Da gemäß vorstehender Behauptung rechts ein Isomorphismus steht, steht auch links ein Isomorphismus. ▫

6.3.3 Drei Interpretationen

Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ und $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien. Sei $\mathcal{A} \times \mathcal{A}' \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ ein biadditiver Funktor.

Für $X' \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}'$ machen wir nun Gebrauch von der Kurzschreibweise $F(-,X') = \mathrm{C}(F(-,X'))$, so daß für $Y \in \operatorname{Ob}\mathrm{C}(\mathcal{A})$ und $k \in \mathbf{Z}$ sich $\big(F(Y,X')^k \xrightarrow{d} F(Y,X')^{k+1}\big) = F(Y^k,X') \xrightarrow{F(d,X')} F(Y^{k+1},X')$ ergibt. Dies liefert einen biadditiven Funktor

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{C}(\mathcal{A}) \times \mathcal{A}' & \xrightarrow{F} & \mathrm{C}(\mathcal{B}) \\
\big((Y,X') \xrightarrow{(g,f)} (\tilde{Y},\tilde{X}')\big) & \longmapsto & \big(F(Y,X') \xrightarrow{F(g,f')} F(\tilde{Y},\tilde{X}')\big)\,,
\end{array}$$

wobei der Morphismus von Komplexen $F(g,f') : F(Y,X') \longrightarrow F(\tilde{Y},\tilde{X}')$ bei $k \in \mathbf{Z}$ durch $F(g^k,f') : F(Y^k,X') \longrightarrow F(\tilde{Y}^k,\tilde{X}')$ gegeben sei; beachte, daß $F(g^k,f')F(d,\tilde{X}') = F(g^k d,f') = F(dg^{k+1},f') = F(d,X')F(g^{k+1},f')$.

Analog auch $F(-,X') = \mathrm{K}(F(-,X'))$.

Entsprechend machen wir Gebrauch von der Kurzschreibweise $F(X,-) = \mathrm{C}(F(X,-))$ für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Analog auch $F(X,-) = \mathrm{K}(F(X,-))$

Bemerkung 177
Sei $X' \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}'$. Wir haben einen Isomorphismus $v_{Y,X'} : F(Y,X') \xrightarrow{\sim} \mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(Y,\operatorname{Konz}X')$ in $\mathrm{C}(\mathcal{B})$, natürlich in $(Y,X') \in \operatorname{Ob}(\mathrm{C}(\mathcal{A}) \times \mathcal{A}')$.

Beweis. Wir haben folgenden Isomorphismus.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "F(d,X')"] & F(Y^k, X') \arrow[r, "F(d,X')"] \arrow[d, "(-1)^{k(k-1)/2}", "\wr"'] & F(Y^{k+1}, X') \arrow[r, "F(d,X')"] \arrow[d, "(-1)^{(k+1)k/2}", "\wr"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "(-1)^{k-1}F(d,X')"] & F(Y^k, X') \arrow[r, "(-1)^{k}F(d,X')"] & F(Y^{k+1}, X') \arrow[r, "(-1)^{k+1}F(d,X')"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Die obere Zeile ist gleich $F(Y, X')$. Die untere Zeile entsteht aus $\mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(Y, \operatorname{Konz} X')$ durch Weglassen von Nullsummanden, so daß wir einen Isomorphismus von ihr nach $\mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(Y, \operatorname{Konz} X')$ haben. Die verlangte Natürlichkeit läuft für einen Repräsentanten $Y \xrightarrow{g} \tilde{Y}$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ und für $X' \xrightarrow{f'} \tilde{X}'$ in $\mathcal{A}'$ auf $F(g^k, f')(-1)^{k(k-1)/2} = (-1)^{k(k-1)/2} F(g^k, f')$ für $k \in \mathbf{Z}$ hinaus. ▫

Bemerkung 178 *Sei $F(I, =)$ exakt für $I \in \operatorname{Ob} \operatorname{Inj} \mathcal{A}$. Sei $J \in \mathrm{C}(\operatorname{Inj} \mathcal{A})$. Sei $X' \xrightarrow{f'} Y'$ ein Quasiisomorphismus in $\mathrm{C}(\mathcal{A}')$. Dann ist $\mathrm{t}F(J, f) : \mathrm{t}F(J, X') \longrightarrow \mathrm{t}F(J, Y')$ ein Quasiisomorphismus.*

Beweis. Dank Lemma 176 genügt es zu zeigen, daß $F(I^k, X') \xrightarrow{F(I^k, f')} F(I^k, Y')$ ein Quasiisomorphismus ist für $k \geqslant 0$. Da $F(I^k, -)$ exakt ist, folgt dies aus Bemerkung 174. ▫

Bemerkung 179 *Haben $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ genügend Injektive.*

Es ist $(\mathrm{R}^k F(X, =))(X') = \mathrm{H}^k F(X, \operatorname{IRes} X')$ für $k \geqslant 0$ ein biadditiver Funktor in $(X, X') \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A} \times \mathcal{A}')$.

Es ist $(\mathrm{R}^k F(-, X'))(X) = \mathrm{H}^k F(\operatorname{IRes} X, X')$ für $k \geqslant 0$ ein biadditiver Funktor in $(X, X') \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A} \times \mathcal{A}')$.

Beweis. Dies folgt aus der Additivität von IRes; cf. Aufgabe 56.(2, 4), Beispiel 113.(5). ▫

Satz 180

(1) *Haben $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ genügend Injektive.*

(i) *Sei $F(I,=)$ exakt für $I \in \operatorname{Ob}\operatorname{Inj}\mathcal{A}$. Für $k \geqslant 0$ ist*

$$(\mathrm{R}^k F)(X,X') \;\simeq\; (\mathrm{R}^k F(-,X'))(X)\ ,$$

natürlich in $(X,X') \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A}\times\mathcal{A}')$.

(ii) *Sei $F(-,I')$ exakt für $I' \in \operatorname{Ob}\operatorname{Inj}\mathcal{A}'$. Für $k \geqslant 0$ ist*

$$(\mathrm{R}^k F)(X,X') \;\simeq\; (\mathrm{R}^k F(X,=))(X')\ ,$$

natürlich in $(X,X') \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A}\times\mathcal{A}')$.

(1°) *Haben $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ genügend Projektive.*

(i) *Sei $F(P,=)$ exakt für $P \in \operatorname{Ob}\operatorname{Proj}\mathcal{A}$. Für $k \geqslant 0$ ist*

$$(\mathrm{L}_k F)(X,X') \;\simeq\; (\mathrm{L}_k F(-,X'))(X)\ ,$$

natürlich in $(X,X') \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A}\times\mathcal{A}')$.

(ii) *Sei $F(-,P')$ exakt für $P' \in \operatorname{Ob}\operatorname{Proj}\mathcal{A}'$. Für $k \geqslant 0$ ist*

$$(\mathrm{L}_k F)(X,X') \;\simeq\; (\mathrm{L}_k F(X,=))(X')\ ,$$

natürlich in $(X,X') \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A}\times\mathcal{A}')$.

Beweis. Zu (1.i). Sei $(X,X') \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A}\times\mathcal{A}')$.

Es ist $\operatorname{Konz} X' \xrightarrow{eX'} \operatorname{IRes} X'$ ein Quasiisomorphismus; cf. Bemerkung 173. Somit ist auch $\mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(\operatorname{IRes} X,\, eX')$ ein Quasiisomorphismus; cf. Bemerkung 178. Also ist auch dessen Bild

$$F^{\mathrm{K}}(\operatorname{IRes} X, \operatorname{Konz} X') \xrightarrow{F^{\mathrm{K}}(\operatorname{IRes} X,\, eX')} F^{\mathrm{K}}(\operatorname{IRes} X, \operatorname{IRes} X')$$

in der Homotopiekategorie ein Quasiisomorphismus.

Beachte ferner, daß $F^{\mathrm{K}}(\operatorname{IRes} X,\, eX')$ natürlich in $(X,X') \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A}\times\mathcal{A}')$ ist; i.e. für $X \xrightarrow{f} \tilde{X}$ in $\mathcal{A}$ und $X' \xrightarrow{f'} \tilde{X}'$ in $\mathcal{A}'$ ist $F^{\mathrm{K}}(\operatorname{IRes} X, eX')\, F^{\mathrm{K}}(\operatorname{IRes} f, \operatorname{IRes} f') = F^{\mathrm{K}}(\operatorname{IRes} f, \operatorname{Konz} f')\, F^{\mathrm{K}}(\operatorname{IRes} \tilde{X}, e\tilde{X}')$.

Sei $k \geqslant 0$. Anwenden von H^k gibt nun

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{R}^k F(-, X'))(X) \arrow[d, equal] \\
\mathrm{H}^k F(\mathrm{IRes}\, X, X') \arrow[d, "\wr", "\mathrm{H}^k v_{\mathrm{IRes}\, X,\, X'}"'] \\
\mathrm{H}^k F^{\mathrm{K}}(\mathrm{IRes}\, X, \mathrm{Konz}\, X') \arrow[d, "\wr", "\mathrm{H}^k F^{\mathrm{K}}(\mathrm{IRes}\, X,\, eX')"'] \\
\mathrm{H}^k F^{\mathrm{K}}(\mathrm{IRes}\, X, \mathrm{IRes}\, X') \arrow[d, equal] \\
(\mathrm{R}^k F)(X, X') \ ;
\end{tikzcd}$$

cf. Bemerkung 177 und vorstehende Behauptung.

Beide Schritte sind natürlich in $(X, X') \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A} \times \mathcal{A}')$. ▫

Beispiel 181

(1) *Habe $\mathcal{A}$ genügend Injektive und genügend Projektive. Sei $k \geqslant 0$. Es ist*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X, Y) &\overset{1.}{=} \big(\mathrm{R}^k \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, =)\big)(X, Y) &&= \mathrm{H}^k \mathrm{t}\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{PRes}\, X, \mathrm{IRes}\, Y) \\
&\overset{2.}{\simeq} \big(\mathrm{R}^k \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, =)\big)(Y) &&= \mathrm{H}^k \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \mathrm{IRes}\, Y) \\
&\overset{3.}{\simeq} \big(\mathrm{R}^k \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, Y)\big)(X) &&= \mathrm{H}^k \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{PRes}\, X, Y) \ ,
\end{aligned}$$

natürlich in $(X, Y) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}^\circ \times \mathcal{A})$. Insbesondere ist $\mathrm{Ext}^0_{\mathcal{A}}(X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$. Cf. Definitionen 156 *und* 171.(1).

(2) *Sei $k \geqslant 0$. Es ist*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tor}^R_k(X, Y) &\overset{1.}{=} (\mathrm{L}_k(- \underset{R}{\otimes} =))(X, Y) &&= \mathrm{H}_k \mathrm{t}(\mathrm{PRes}\, X \underset{R}{\otimes} \mathrm{PRes}\, Y) \\
&\overset{2.}{\simeq} (\mathrm{L}_k(X \underset{R}{\otimes} =))(Y) &&= \mathrm{H}_k(X \underset{R}{\otimes} \mathrm{PRes}\, Y) \\
&\overset{3.}{\simeq} (\mathrm{L}_k(- \underset{R}{\otimes} Y))(X) &&= \mathrm{H}_k(\mathrm{PRes}\, X \underset{R}{\otimes} Y) \ ,
\end{aligned}$$

natürlich in $(X, Y) \in \mathrm{Ob}(\text{Mod-}R \times R\text{-Mod})$. Insbesondere ist $\mathrm{Tor}^R_0(X, Y) \simeq X \underset{R}{\otimes} Y$. Cf. Definitionen 157 *und* 171.(2).

Beweis.

Zu (1). Satz 180.(1) findet Anwendung, da ${}_{\mathcal{A}}(-, I)$ für $I \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Inj}\,\mathcal{A}$ und ${}_{\mathcal{A}}(P, -)$ für $P \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Proj}\,\mathcal{A} = \mathrm{Ob}\,\mathrm{Inj}(\mathcal{A}^\circ)$ exakt sind; cf. Definition 137. Die Aussage über $\mathrm{Ext}^0_{\mathcal{A}}(X, Y)$ folgt aus Bemerkung 164.

Zu (2). Satz 180.(2) findet Anwendung dank der Exaktheit von $- \underset{R}{\otimes} P$ für $P \in \operatorname{Ob}\operatorname{Proj}(R\text{-Mod})$ aus Aufgabe 28.(5) und dank der dazu symmetrischen Eigenschaft. Die Aussage über $\operatorname{Tor}_0^R(X,Y)$ folgt aus Bemerkung 164°. ▫

Beispiel 182 Sei $\mathcal{A} = \mathbf{Z}/16$-mod. In Beispiel 158 wurde u.a. $\operatorname{Ext}^2_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/8, \mathbf{Z}/4) \simeq \mathbf{Z}/2$ über eine injektive Auflösung berechnet. Wir können nun auch wie folgt mittels einer projektiven Auflösung rechnen.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ext}^2_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/8, \mathbf{Z}/4) &\simeq \mathrm{H}^2 \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}\big((\cdots \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/16 \xrightarrow{8} \mathbf{Z}/16 \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/16 \xrightarrow{8} \mathbf{Z}/16),\ \mathbf{Z}/4\big) \\
&\simeq \mathrm{H}^2(\cdots \xleftarrow{2} \mathbf{Z}/4 \xleftarrow{8} \mathbf{Z}/4 \xleftarrow{2} \mathbf{Z}/4 \xleftarrow{8} \mathbf{Z}/4) \\
&\simeq \mathrm{H}^2(\cdots \xleftarrow{2} \mathbf{Z}/4 \xleftarrow{0} \mathbf{Z}/4 \xleftarrow{2} \mathbf{Z}/4 \xleftarrow{0} \mathbf{Z}/4) \\
&\simeq \mathbf{Z}/2
\end{aligned}$$

Kapitel 7

Ergänzungen

7.1 Yoneda-ext

In diesem Abschnitt §7.1 verwenden wir die provisorische Definition 156 von Ext; cf. auch Bemerkung 179.

7.1.1 Der Shiftfunktor

Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Sei $k \in \mathbf{Z}$.

Für $X \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}(\mathcal{A})$ definieren wir $X[k] \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}(\mathcal{A})$ durch $X[k]^i := X^{k+i}$ und durch $d^i_{X[k]} = (-1)^k d^{i+k}_X$ für $i \in \mathbf{Z}$.

Für $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ definieren wir $X[k] \xrightarrow{f[k]} Y[k]$ durch $f[k]^i := f^{k+i}$ für $i \in \mathbf{Z}$.

Es ist $(-)[k]$ ein Funktor. Es ist $(-)[0] = \mathrm{id}_{\mathrm{C}(\mathcal{A})}$. Für $k, \ell \in \mathbf{Z}$ ist $(-)[\ell] \circ (-)[k] = (-)[k+\ell]$.

Cf. auch Aufgabe 63.

Ist nun X split azyklisch, so auch $X[k]$; cf. Aufgabe 51.(2). Also induziert $(-)[k]$ einen gleichnamigen Funktor auf $\mathrm{K}(\mathcal{A})$; cf. Definition 142, Bemerkung 116.

7.1.2 Quasiisomorphismen induzieren Isomorphismen

Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie.

Für $X \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}(\mathcal{A})$ haben wir den Morphismus

$$\begin{pmatrix} X \\ {\scriptstyle \zeta_X}\downarrow \\ \mathrm{c}(X) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cdots \xrightarrow{d} X^{i-1} \xrightarrow{d} X^i \xrightarrow{d} X^{i+1} \xrightarrow{d} \cdots \\ \qquad\qquad \downarrow{\scriptstyle (1\,d)} \qquad\qquad \downarrow{\scriptstyle (1\,d)} \qquad\qquad \downarrow{\scriptstyle (1\,d)} \\ \cdots \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)} X^{i-1} \oplus X^i \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)} X^i \oplus X^{i+1} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)} X^{i+1} \oplus X^{i+2} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)} \cdots \end{pmatrix}$$

in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Ein Morphismus $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ ist genau dann nullhomotop, wenn er als $f = \zeta_X f'$ faktorisiert für ein f' in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$; cf. Lösung zu Aufgabe 55.(1).

Bemerkung 183 *Sei $X \overset{g}{\bullet\!\!\to} Y$ punktweise split monomorph in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Dann faktorisiert $(X \overset{\zeta_X}{\bullet\!\!\to} \mathrm{c}(X)) = (X \overset{g}{\bullet\!\!\to} Y \xrightarrow{t} \mathrm{c}(X))$ für ein g in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$.*

Beweis. Nach punktweiser isomorpher Ersetzung können wir g schreiben als den oberen Morphismus des folgenden Diagramms; cf. §5.6. Die Faktorisierung von ζ_X über f ergibt sich wie im Diagramm; beachte, daß $u^{i-1}d + du^i = 0$ für $i \in \mathbf{Z}$ aus der Differentialbedingung des mittleren Komplexes Y folgt.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X^{i-1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "{(1\,0)}"'] & X^{i} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "{(1\,0)}"'] & X^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "{(1\,0)}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & X^{i-1} \oplus Z^{i-1} \arrow[r, "{\left(\begin{smallmatrix} d & 0 \\ u^{i-1} & d \end{smallmatrix}\right)}"] \arrow[d, "{\left(\begin{smallmatrix} 1 & d \\ 0 & u^{i-1} \end{smallmatrix}\right)}"'] & X^{i} \oplus Z^{i} \arrow[r, "{\left(\begin{smallmatrix} d & 0 \\ u^{i} & d \end{smallmatrix}\right)}"] \arrow[d, "{\left(\begin{smallmatrix} 1 & d \\ 0 & u^{i} \end{smallmatrix}\right)}"'] & X^{i+1} \oplus Z^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "{\left(\begin{smallmatrix} 1 & d \\ 0 & u^{i+1} \end{smallmatrix}\right)}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & X^{i-1} \oplus X^{i} \arrow[r, "{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)}"] & X^{i} \oplus X^{i+1} \arrow[r, "{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)}"] & X^{i+1} \oplus X^{i+2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

□

Wir können nun Aufgabe 55.(1) etwas verallgemeinern.

Korollar 184 *Sei $X \xrightarrow{f} Y$ ein Morphismus in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Sei $X \overset{g}{\bullet\!\!\to} U$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ punktweise split monomorph mit U split azyklisch. Dann ist f nullhomotop genau dann, wenn es eine Faktorisierung $(X \xrightarrow{f} Y) = (X \overset{g}{\bullet\!\!\to} U \xrightarrow{u} Y)$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ gibt.*

Beweis. Gibt es eine Faktorisierung $(X \xrightarrow{f} Y) = (X \overset{g}{\bullet\!\!\to} U \xrightarrow{s} Y)$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$, so ist wegen $U \simeq 0$ in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ in der Tat das Bild von f in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ gleich null, i.e. f ist nullhomotop; cf. Aufgabe 55.(1).

Sei umgekehrt f als nullhomotop vorausgesetzt. Dann gibt es eine Faktorisierung $(X \xrightarrow{f} Y) = (X \overset{\zeta_X}{\bullet\!\!\to} \mathrm{c}(X) \xrightarrow{s} Y)$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$; cf. Lösung zu Aufgabe 55.(1). Ferner können wir $(X \overset{\zeta_X}{\bullet\!\!\to} \mathrm{c}(X)) = (X \overset{g}{\bullet\!\!\to} U \xrightarrow{t} \mathrm{c}(X))$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ faktorisieren; cf. Bemerkung 183. Insgesamt wird $(X \xrightarrow{f} Y) = (X \overset{g}{\bullet\!\!\to} U \xrightarrow{ts} Y)$, wie verlangt. □

Bemerkung 185 *Seien $X \xrightarrow{f} Y$ ein Quasiisomorphismus in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Sei $K \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{C}(\mathrm{Inj}\,\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{Ob}\,\mathrm{C}(\mathcal{A})$ ein Komplex, für welchen es ein $\ell \in \mathbf{Z}$ gibt mit $K^i = 0$ für $i < \ell$. Dann erhalten wir einen Isomorphismus*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(X, K) \xleftarrow[\sim]{f(-)} \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(Y, K)\ .$$

Beweis. Zeigen wir die *Injektivität* von $\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(f, K)$.

Da ζ_X punktweise split monomorph, f ein Quasiisomorphismus und $\mathrm{c}(X)$ azyklisch ist, ist $X \xrightarrow{(f\,\zeta_X)} Y \oplus \mathrm{c}(X)$ ein punktweise split monomorpher Quasiisomorphismus. Wir ergänzen zu einer punktweise split kurz exakten Sequenz

$$X \xrightarrow{(f\,\zeta_X)} Y \oplus \mathrm{c}(X) \xrightarrow{\binom{g}{v}} V \ .$$

Da $(f\,\zeta_X)$ ein Quasiisomorphismus ist, ist V azyklisch; cf. Aufgabe 61.(1). Dank Bemerkung 148 ist also $\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(V, K) = 0$.

Sei nun $Y \xrightarrow{t} K$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ so gegeben, daß ft nullhomotop ist. Wir haben zu zeigen, daß t nullhomotop ist. Gemäß Lösung zu Aufgabe 55.(1) (oder Korollar 184) gibt es eine Faktorisierung $ft = \zeta_X u$. Somit ist $(f\,\zeta_X)\binom{t}{-u} = 0$. Folglich gibt es eine Faktorisierung $\binom{t}{-u} = \binom{g}{v}\,w$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Insbesondere ist $t = gw$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$, also auch in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$. Da $\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(V, K) = 0$, ist aber w und somit auch $t = gw$ nullhomotop.

Zeigen wir die *Surjektivität* von $\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(f, K)$. Bis auf Vorzeichen dual zu $X \xrightarrow{\zeta_X} \mathrm{c}(X)$ haben wir einen Morphismus $\mathrm{c}(Y)[-1] \xrightarrow{\xi_Y} Y$, welcher punktweise split epimorph ist; viz.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & Y^{i-2} \oplus Y^{i-1} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}0&0\\-1&0\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\binom{-d}{1}"] & Y^{i-1} \oplus Y^{i} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}0&0\\-1&0\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\binom{-d}{1}"] & Y^{i} \oplus Y^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "\binom{-d}{1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y^{i-1} \arrow[r, "d"] & Y^{i} \arrow[r, "d"] & Y^{i+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd} \ .$$

Wir ergänzen zu folgender punktweise split exakten Sequenz.

$$V' \xrightarrow{(g'\,v')} X \oplus \mathrm{c}(Y)[-1] \xrightarrow{\binom{f}{\xi_Y}} Y$$

Wegen f Quasiisomorphismus und $\mathrm{c}(Y)[-1]$ azyklisch ist auch $\binom{f}{\xi_Y}$ ein Quasiisomorphismus. Daher ist V' azyklisch; cf. Aufgabe 61.(1).

Sei nun $X \xrightarrow{t'} K$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ gegeben. Wir haben ein $Y \xrightarrow{s'} K$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ so zu finden, daß $t' - fs'$ nullhomotop ist. Da V' azyklisch ist, ist $(g'\,v')\binom{t'}{0}$ nullhomotop; cf. Bemerkung 148. Somit gibt es eine Faktorisierung $(g'\,v')\binom{t'}{0} = (g'\,v')\,\zeta_{X\oplus\mathrm{c}(Y)[-1]}\,u'$, da die ersten beiden Faktoren der rechten Seite punktweise split monomorph sind, und also auch ihr Kompositum; cf. Korollar 184. Also ist

$$(g'\,v')\left(\binom{t'}{0} - \zeta_{X\oplus\mathrm{c}(Y)[-1]}u'\right) \ = \ 0 \ .$$

Folglich gibt es eine Faktorisierung $\binom{t'}{0} - \zeta_{X\oplus\mathrm{c}(Y)[-1]}u' = \binom{f}{\xi_Y}\,s'$. Schreibe $\binom{\zeta_1}{\zeta_2} := \zeta_{X\oplus\mathrm{c}(Y)[-1]}$. Wir erhalten $t' - fs' = \zeta_1 u'$. Da das Zielobjekt $\mathrm{c}(X \oplus \mathrm{c}(Y)[-1])$ von ζ_1 split azyklisch ist, folgt $t' - fs'$ nullhomotop, wie gewünscht. ▫

7.1.3 Ext als Hom

Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genügend Injektiven. Seien $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$.

Sei I eine injektive Auflösung von X. Sei $\operatorname{Konz} X \overset{e_{X,I}}{\bullet\!\!\to} I$ ein Quasiisomorphismus.

Sei J eine injektive Auflösung von Y.

Cf. Bemerkungen 151 und 161.

Bemerkung 186 *Sei $k \geqslant 0$. Sei $Z \in \operatorname{Ob}\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Wir haben einen Isomorphismus*

$$\mathrm{H}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Z) \xrightarrow[\sim]{\Phi^k(X,Z)} \operatorname{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\operatorname{Konz} X, Z[k]) \ ,$$

natürlich in $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ und $Z \in \operatorname{Ob}\mathrm{C}(\mathcal{A})$.

Beweis. Beachte, daß gemäß unserer Wahl von Kernen und Cokernen in **Z**-Mod sich

$$\mathrm{H}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Z) \ = \ \frac{\operatorname{Kern} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, d_Z^k)}{\operatorname{Im} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, d_Z^{k-1})}$$

ergibt. Ferner haben wir einen **Z**-linearen Isomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Kern} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, d_Z^k) & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{Hom}_{\mathrm{C}(\mathcal{A})}(\operatorname{Konz} X, Z[k]) \\ f & \longmapsto & (\dots, 0, f, 0, \dots) \ , \end{array}$$

wobei der Eintrag f an Position 0 stehe. Der Kern des Kompositums

$$\operatorname{Kern} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, d_Z^k) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathrm{C}(\mathcal{A})}(\operatorname{Konz} X, Z[k]) \xrightarrow{R} \operatorname{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\operatorname{Konz} X, Z[k])$$

ist gerade gleich $\operatorname{Im} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, d_Z^{k-1})$; cf. Aufgabe 55.(1).

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] \arrow[dl, "h"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Z^{k-1} \arrow[r, "(-1)^k d_Z^{k-1}"'] & Z^k \arrow[r, "(-1)^k d_Z^k"'] & Z^{k+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Dies liefert nach Homomorphiesatz, Lemma 30, den **Z**-linearen Isomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Z) & \xrightarrow[\sim]{\Phi^k(X,Z)} & \operatorname{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\operatorname{Konz} X, Z[k]) \\ f + \operatorname{Im} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, d_Z^{k-1}) & \longmapsto & (\dots, 0, f, 0, \dots) \ . \end{array}$$

Sind nun $X' \xrightarrow{x} X$ in $\mathcal{A}$ und $Z \xrightarrow{z} Z'$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ gegeben, so wird

$$\begin{array}{rl} & \big(f + \operatorname{Im} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, d_Z^{k-1})\big) \mathrm{H}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(x, z) \Phi^k(X', Z') \\ = & \big(x f z^k + \operatorname{Im} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X', d_{Z'}^{k-1})\big) \Phi^k(X', Z') \\ = & (\dots, 0, x f z^k, 0, \dots) \\ = & (\dots, 0, f, 0, \dots) \operatorname{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\operatorname{Konz} x, z[k]) \\ = & \big(f + \operatorname{Im} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, d_Z^{k-1})\big) \Phi^k(X, Z) \operatorname{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\operatorname{Konz} x, z[k]) \ ; \end{array}$$

cf. §6.3.3. ▫

Korollar 187 *Sei $k \geqslant 0$.*

Wir haben einen Isomorphismus $\operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y) \xrightarrow[\sim]{\Phi^k(X,Y)} \operatorname{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\operatorname{Konz} X, (\operatorname{IRes} Y)[k])$, *natürlich in* $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$.

Insbesondere ist $\operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\operatorname{Konz} X, J[k])$, *natürlich in* $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$.

Beweis. Zunächst sei an $\operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y) = \mathrm{H}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \operatorname{IRes} Y)$ erinnert; verwende dann Bemerkung 186.

Ferner sind $\operatorname{IRes} Y$ und J isomorph in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$, cf. Bemerkung 151.(1). Es folgt, daß $\operatorname{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\operatorname{Konz} X, J[k]) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\operatorname{Konz} X, (\operatorname{IRes} Y)[k]) \simeq \operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y)$, natürlich in $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. □

Bemerkung 188 *Sei $k \geqslant 0$.*

Es ist $\operatorname{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\operatorname{Konz} X, J[k]) \xleftarrow[\sim]{e_{X,I}(-)} \operatorname{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(I, J[k])$.

Insbesondere haben wir den Isomorphismus

$$\begin{aligned} &\big(\operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y) \xrightarrow[\sim]{\Psi^k(X,Y)} \operatorname{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\operatorname{IRes} X, (\operatorname{IRes} Y)[k])\big) \\ := \ &\big(\operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y) \xrightarrow[\sim]{\Phi^k(X,Y)} \operatorname{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\operatorname{Konz} X, (\operatorname{IRes} Y)[k]) \xrightarrow[\sim]{(eX(-))^{-1}} \operatorname{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\operatorname{IRes} X, (\operatorname{IRes} Y)[k])\big) \end{aligned}$$

abelscher Gruppen, natürlich in $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$.

Beweis. Daß $e_{X,I}(-)$ ein Isomorphismus ist, folgt aus $e_{X,I}$ Quasiisomorphismus; cf. Bemerkung 185.

Ferner ist auch eX ein Quasiisomorphismus; cf. Bemerkung 173. Die Natürlichkeit von $eX(-)$ in X und Y folgt aus der Natürlichkeit von eX in X. Denn seien $X' \xrightarrow{x} X$ und $Y \xrightarrow{y} Y'$ in $\mathcal{A}$ gegeben. Sei ferner $\operatorname{IRes} X \xrightarrow{f} (\operatorname{IRes} Y)[k]$ in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ gegeben. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \big((\operatorname{IRes} x) f (\operatorname{IRes} y)[k]\big)(eX'(-)) &= (eX')(\operatorname{IRes} x) f (\operatorname{IRes} y)[k] \\ &= (\operatorname{Konz} x)(eX) f (\operatorname{IRes} y)[k] \\ &= (\operatorname{Konz} x)\big(f(eX(-)\big)(\operatorname{IRes} y)[k] \ . \end{aligned}$$

□

Bemerkung 189 *Wir haben einen Isomorphismus abelscher Gruppen*

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y) &\xrightarrow[\sim]{\operatorname{IRes}} \operatorname{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\operatorname{IRes} X, \operatorname{IRes} Y) \\ f &\longmapsto \operatorname{IRes} f \ , \end{aligned}$$

natürlich in $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$.

Wir haben einen Isomorphismus abelscher Gruppen

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y) &\xrightarrow[\sim]{\varepsilon(X,Y)} \mathrm{Z}^0 \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \operatorname{IRes} Y) = \mathrm{H}^0 \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \operatorname{IRes} Y) = \operatorname{Ext}^0(X,Y) \\ f &\longmapsto f(eY)^0 \ , \end{aligned}$$

natürlich in $X,\, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$.

Insgesamt haben wir folgendes kommutative Dreieck.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y) \arrow[r, "\varepsilon(X,Y)", "\sim"'] \arrow[dr, "\wr", "\mathrm{IRes}"'] & \operatorname{Ext}^0_{\mathcal{A}}(X,Y) \arrow[d, "\wr", "\Psi^0(X,Y)"'] \\
& \operatorname{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\mathrm{IRes}\, X, \mathrm{IRes}\, Y)
\end{tikzcd}$$

Beweis. Die vom Funktor IRes gelieferte Abbildung ist ein Isomorphismus abelscher Gruppen, da dieser Funktor voll, treu und additiv ist; cf. Lemma 149, Bemerkung 111.

Zu $\varepsilon(X,Y)$. Es ist

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y) & \xrightarrow{\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X,(eY)^0)} & \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X,(\mathrm{IRes}\, Y)^0) \\
f & \longmapsto & f(eY)^0
\end{array}$$

Diese Abbildung faktorisiert als $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X,(eY)^0) = \varepsilon(X,Y)\,\iota_{\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X,d)}$. Gemäß Bemerkung 164 ist $\varepsilon(X,Y)$ ([7]) also ein Isomorphismus abelscher Gruppen. Natürlichkeit in Y wurde dort schon festgestellt. Natürlichkeit in X ist anhand der Abbildungsvorschrift erkennbar; cf. §6.3.3.

Zur Kommutativität des angegebenen Dreiecks. Sei $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)$ gegeben. Wir erhalten

$$\begin{array}{rcl}
(\mathrm{IRes}\, f)\Psi^0(X,Y)^{-1} & = & ((eX)(\mathrm{IRes}\, f))\Phi^0(X,Y)^{-1} \\
& = & ((\mathrm{Konz}\, f)(eY))\Phi^0(X,Y)^{-1} \\
& = & ((\mathrm{Konz}\, f)(eY))^0 \\
& = & f(eY)^0 \\
& = & f\varepsilon(X,Y)\ .
\end{array}$$

□

7.1.4 Produkte auf Ext

Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genügend Injektiven. Seien $X,\, Y,\, Z,\, W \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Seien $k,\, \ell,\, m \geqslant 0$.

Definition 190 Wir haben die **Z**-bilineare Kompositionsabbildung

$$\begin{array}{ccccc}
\operatorname{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\mathrm{IRes}\, X, (\mathrm{IRes}\, Y)[k]) & \times & \operatorname{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\mathrm{IRes}\, Y, (\mathrm{IRes}\, Z)[\ell]) & \xrightarrow{(\star)} & \operatorname{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\mathrm{IRes}\, X, (\mathrm{IRes}\, Z)[k+\ell]) \\
(f & , & g) & \longmapsto & f \star g \ := \ f \cdot g[k]\ ;
\end{array}$$

[7] In loc. cit. nur als εY bezeichnet.

cf. Definition 142, Bemerkung 105, Aufgabe 56.(2, 4).

Ferner, sind $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\mathrm{IRes}\, X, (\mathrm{IRes}\, Y)[k])$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\mathrm{IRes}\, Y, (\mathrm{IRes}\, Z)[\ell])$ und $h \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\mathrm{IRes}\, Z, (\mathrm{IRes}\, W)[m])$ gegeben, so gilt

$$f \star (g \star h) \;=\; (f \star g) \star h \;\in\; \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\mathrm{IRes}\, X, (\mathrm{IRes}\, W)[k+\ell+m])\ .$$

Denn $f \star (g \star h) = f \cdot (g \cdot h[\ell])[k] = f \cdot g[k] \cdot h[\ell + k] = (f \star g) \star h$.

Definition 191 Strukturtransport gibt uns die mißbräuchlich wieder mit $(\star)$ bezeichnete $\mathbf{Z}$-bilineare Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y) & \times & \mathrm{Ext}^\ell_{\mathcal{A}}(Y,Z) & \xrightarrow{(\star)} & \mathrm{Ext}^{k+\ell}_{\mathcal{A}}(X,Z) \\ (\rho & , & \sigma) & \longmapsto & \rho \star \sigma \;:=\; \big(\rho\Psi^k(X,Y) \star \sigma\Psi^\ell(Y,Z)\big)\Psi^{k+\ell}(X,Z)^{-1}\ ; \end{array}$$

cf. Definition 190, Bemerkung 188.

Bemerkung 192

(1) *Seien* $\rho \in \mathrm{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y)$, $\sigma \in \mathrm{Ext}^\ell_{\mathcal{A}}(Y,Z)$ *und* $\tau \in \mathrm{Ext}^m_{\mathcal{A}}(Z,W)$. *Dann ist*

$$\rho \star (\sigma \star \tau) \;=\; (\rho \star \sigma) \star \tau \;\in\; \mathrm{Ext}^{k+\ell+m}_{\mathcal{A}}(X,W)\ .$$

(2) *Seien* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X',X)$, $\rho \in \mathrm{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y)$ *und* $v \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y,Y')$. *Dann ist*

$$u\varepsilon(X',X) \star \rho \star v\varepsilon(Y,Y') \;=\; \rho\,\mathrm{Ext}^k(u,v) \;\in\; \mathrm{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X',Y')\ ;$$

cf. Bemerkung 189.

Beweis.

Zu (1). Es ist

$$\begin{aligned} & \rho \star (\sigma \star \tau) \\ = \;& \Big(\rho\Psi^k(X,Y) \star \big(\big(\sigma\Psi^\ell(Y,Z) \star \tau\Psi^m(Z,W)\big)\Psi^{\ell+m}(Y,W)^{-1}\big)\Psi^{\ell+m}(Y,W)\Big)\Psi^{k+\ell+m}(X,W)^{-1} \\ = \;& \Big(\rho\Psi^k(X,Y) \star \big(\sigma\Psi^\ell(Y,Z) \star \tau\Psi^m(Z,W)\big)\Big)\Psi^{k+\ell+m}(X,W)^{-1} \\ = \;& \Big(\big(\rho\Psi^k(X,Y) \star \sigma\Psi^\ell(Y,Z)\big) \star \tau\Psi^m(Z,W)\Big)\Psi^{k+\ell+m}(X,W)^{-1} \\ = \;& \Big(\big(\big(\rho\Psi^k(X,Y) \star \sigma\Psi^\ell(Y,Z)\big)\Psi^{k+\ell}(X,Z)^{-1}\big)\Psi^{k+\ell}(X,Z) \star \tau\Psi^m(Z,W)\Big)\Psi^{k+\ell+m}(X,W)^{-1} \\ = \;& (\rho \star \sigma) \star \tau\ . \end{aligned}$$

Zu (2). Unter Zuhilfenahme der Rechnung zu (1), Bemerkung 189 und der Natürlichkeit von $\Psi^k(X,Y)$ aus Bemerkung 188 wird

$$\begin{aligned}
& u\varepsilon(X',X) \star \rho \star v\varepsilon(Y,Y') \\
= \; & \big(u\varepsilon(X',X)\Psi^0(X',X) \star \rho\Psi^k(X,Y) \star v\varepsilon(Y,Y')\Psi^0(Y,Y')\big)\Psi^k(X',Y')^{-1} \\
= \; & \big(\operatorname{IRes} u \star \rho\Psi^k(X,Y) \star \operatorname{IRes} v\big)\Psi^k(X',Y')^{-1} \\
= \; & \big(\operatorname{IRes} u \cdot \rho\Psi^k(X,Y) \cdot (\operatorname{IRes} v)[k]\big)\Psi^k(X',Y')^{-1} \\
= \; & \big(\rho\Psi^k(X,Y)\operatorname{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\operatorname{IRes} u, (\operatorname{IRes} v)[k])\big)\Psi^k(X',Y')^{-1} \\
= \; & \big(\rho\operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(u,v)\Psi^k(X',Y')\big)\Psi^k(X',Y')^{-1} \\
= \; & \rho\operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(u,v)\ .
\end{aligned}$$

□

7.1.5 Ext und Erweiterungen: das Yoneda-ext

Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Seien X, Y, Z, $W \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$.

Definition 193 Sei $k \geqslant 1$. Sei $\hat{\operatorname{ext}}^k_{\mathcal{A}}(X,Y)$ die Menge ([3]) der lang exakten Sequenzen der Form

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow M^0 \longrightarrow M^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M^{k-2} \longrightarrow M^{k-1} \longrightarrow X \longrightarrow 0\ ,$$

manchmal auch ohne die Nullobjekte notiert.

Es heißen E, $E' \in \hat{\operatorname{ext}}^k_{\mathcal{A}}(X,Y)$ *elementar äquivalent,* falls ein Diagrammorphismus der folgenden Form existiert, worin E die obere und E' die untere Zeile ist.

$$(*) \qquad \begin{tikzcd}
Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & M^0 \arrow[r] & M^1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & M^{k-2} \arrow[r] & M^{k-1} \arrow[r] & X \arrow[d, equal] \\
Y \arrow[r] & M'^0 \arrow[r] \arrow[u] & M'^1 \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \arrow[r] & M'^{k-2} \arrow[r] \arrow[u] & M'^{k-1} \arrow[r] \arrow[u] & X
\end{tikzcd}$$

Darin sind also alle Vierecke kommutativ.

Sei die Äquivalenzrelation $(\sim)$ auf $\hat{\operatorname{ext}}^k_{\mathcal{A}}(X,Y)$ erzeugt von der Relation der elementaren Äquivalenz. Informell ausgedrückt, für E, $E' \in \hat{\operatorname{ext}}^k_{\mathcal{A}}(X,Y)$ ist $E \sim E'$ genau dann, wenn es eine Zickzackverbindung von E nach E' beliebiger endlicher Länge bestehend aus Diagrammorphismen von der Art $(*)$ gibt. Schreibe $[E]$ für die Äquivalenzklasse von E bezüglich $(\sim)$.

Definiere die *Yoneda*-ext-*Menge*

$$\operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y) \;:=\; \hat{\operatorname{ext}}^k_{\mathcal{A}}(X,Y)/(\sim) \;=\; \{[E] \;:\; E \in \hat{\operatorname{ext}}^k_{\mathcal{A}}(X,Y)\}\ .$$

Bemerkung 194 Im Fall $k = 1$ ist der Morphismus $M^0 \longrightarrow M'^0$ in $(*)$ gemäß Schlangenlemma, Lemma 136, ein Isomorphismus. Insbesondere ist diesenfalls $E \sim E'$ genau dann, wenn E und E' elementar äquivalent sind.

Lemma 195 *Seien*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, "r"] \arrow[d, "f"'] & X'' \arrow[d, "f''"'] \\ K \arrow[r, "j"] & Y \arrow[r, "s"] & Y'' \end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\tilde{i}"] \arrow[d, equal] & \tilde{X} \arrow[r, "\tilde{r}"] \arrow[d, "\tilde{f}"'] & X'' \arrow[d, "\tilde{f}''"'] \\ K \arrow[r, "j"] & Y \arrow[r, "s"] & Y'' \end{tikzcd}$$

Morphismen kurz exakter Sequenzen in $\mathcal{A}$. Sei $\tilde{f}'' - f'' = gs$ für ein $X'' \xrightarrow{g} Y$ in $\mathcal{A}$. Dann gibt es einen Isomorphismus

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\wr"] & X'' \arrow[d, equal] \\ K \arrow[r, "\tilde{i}"] & \tilde{X} \arrow[r, "\tilde{r}"] & X'' \end{tikzcd}$$

kurz exakter Sequenzen.

Beweis. Gemäß Kern-Cokern-Kriterium, Lemma 134, sind (X, X'', Y, Y'') und $(\tilde{X}, X'', Y, Y'')$ Quadrate, haben also insbesondere kurz exakte Diagonalsequenzen.

Es genügt, einen Morphismus $X \xrightarrow{x} \tilde{X}$ mit $x\tilde{r} = r$ und $x\tilde{f} = f$ zu finden. Denn dann ist $ix\tilde{r} = ir = 0 = \tilde{i}\tilde{r}$ und $ix\tilde{f} = if = j = \tilde{i}\tilde{f}$, und somit wegen des Monomorphismus $(\tilde{f}\,\tilde{r})$ aus der Diagonalsequenz von $(\tilde{X}, X'', Y, Y'')$ auch $ix = \tilde{i}$; schließlich ist x dank Schlangenlemma, Lemma 136, ein Isomorphismus.

Nun aber haben wir folgendes kommutative Diagramm mit horizontal den kurz exakten Diagonalsequenzen.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "(f\,r)"] & Y \oplus X'' \arrow[r, "\binom{f''}{-s}"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 1 & g \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)"'] & Y'' \arrow[d, equal] \\ \tilde{X} \arrow[r, "(\tilde{f}\,\tilde{r})"] & Y \oplus X'' \arrow[r, "\binom{\tilde{f}''}{-s}"] & Y'' \end{tikzcd}$$

Sei x der auf den Kernen induzierten Morphismus. □

Satz 196 (Korrespondenz) *Habe $\mathcal{A}$ genügend Injektive. Seien $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Sei $k \geqslant 1$. Wir haben die im folgenden erklärte Bijektion*

$$\operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(X, Y) \xrightarrow[\sim]{\alpha^k_{X,Y}} \operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X, Y)\,.$$

Ist $s \in \mathrm{Z}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \operatorname{IRes} Y)$, so schreiben wir $[s] := s + \operatorname{Im} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, d^k_{\operatorname{IRes} Y}) \in \mathrm{H}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \operatorname{IRes} Y) = \operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X, Y)$; cf. auch Beweis zu Bemerkung 186.

$\overset{\sim}{\longmapsto}$: *Für* $E = (Y \longrightarrow M^0 \longrightarrow M^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M^{k-2} \longrightarrow M^{k-1} \longrightarrow X) \in \hat{\mathrm{ext}}^k_{\mathcal{A}}(X,Y)$ *ist* $[E]\alpha^k_{X,Y}$ *wie folgt gegeben. Wähle ein kommutatives Diagramm*

$$(**)\quad \begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "(eY)^0"] \arrow[d, equal] & (\mathrm{IRes}\,Y)^0 \arrow[r, "d"] & (\mathrm{IRes}\,Y)^1 \arrow[r, "d"] & \cdots \arrow[r, "d"] & (\mathrm{IRes}\,Y)^{k-1} \arrow[r, "d"] & (\mathrm{IRes}\,Y)^k \arrow[r, "d"] & (\mathrm{IRes}\,Y)^{k+1} \\
Y \arrow[r] & M^0 \arrow[r] \arrow[u] & M^1 \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \arrow[r] & M^{k-1} \arrow[r] \arrow[u] & X \arrow[r] \arrow[u, "s"'] & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

mit E *als unterer Zeile. Es ist* $[E]\alpha^k_{X,Y} = [s] \in \mathrm{H}^k\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \mathrm{IRes}\,Y) = \mathrm{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y)$.

Beachte, daß die Kommutativität des letzten Vierecks in $(**)$ *schon mit Hilfe der Epimorphie von* $M^{k-1} \longrightarrow X$ *und der Kommutativität des vorletzten Vierecks folgt.*

$\overset{\sim}{\longmapsfrom}$: *Das Bild von* $[s] \in \mathrm{H}^k\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \mathrm{IRes}\,Y) = \mathrm{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y)$ *unter* $(\alpha^k_{X,Y})^{-1}$ *ist wie folgt gegeben. Bilde folgendes kommutative Diagramm.*

$$(***)\quad \begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "(eY)^0"] \arrow[d, equal] & (\mathrm{IRes}\,Y)^0 \arrow[r, "d"] \arrow[d, equal] & (\mathrm{IRes}\,Y)^1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[r, "d"] & (\mathrm{IRes}\,Y)^{k-2} \arrow[r, "d"] \arrow[d, equal] & (\mathrm{IRes}\,Y)^{k-1} \arrow[r, "\bar{d}"] & \mathrm{I}_d \arrow[r, "\dot{d}"] & (\mathrm{IRes}\,Y)^k \\
Y \arrow[r, "(eY)^0"] & (\mathrm{IRes}\,Y)^0 \arrow[r, "d"] & (\mathrm{IRes}\,Y)^1 \arrow[r, "d"] & \cdots \arrow[r, "d"] & (\mathrm{IRes}\,Y)^{k-2} \arrow[r, "v"] & M^{k-1} \arrow[r] \arrow[u] \arrow[ur, phantom, "\llcorner"] & X \arrow[ul] \arrow[u, "s"'] &
\end{tikzcd}$$

Hierbei sei v *dadurch charakterisiert, daß das Diagramm kommutiert und das Kompositum mit* $M^{k-1} \longrightarrow X$ *verschwindet. Sei* E *die untere Zeile des Diagramms. Dann ist* $[s](\alpha^k_{X,Y})^{-1} = [E] \in \mathrm{ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y)$.

Beachte, daß wegen $\dot{d}$ *monomorph auch* $(M^{k-1}, X, (\mathrm{IRes}\,Y)^{k-1}, (\mathrm{IRes}\,Y)^k)$ *in* $(***)$ *ein Pullback ist; betrachte etwa seine Diagonalsequenz.*

Beweis.

Zeigen wir, daß $\longmapsto$ *wie angegeben wohldefiniert ist.* Mit demselben Argument wie dem für die Vollheit im Beweis zur Auflösungsäquivalenz, Lemma 149, sehen wir, daß wir ein kommutatives Diagramm $(**)$ wählen können.

Sind zwei solche kommutativen Diagramme $(**)$ gegeben mit E als unterer Zeile, so bilden die Differenzen der vertikalen Morphismen einen Komplexmorphismus von E, aufgefaßt als Komplex, nach $\mathrm{IRes}\,Y$. Nach Bemerkung 148 ist dieser Morphismus nullhomotop. Ist s der aus dem ersten und s' der aus dem zweiten Diagramm $(**)$ resultierende Morphismus, so faktorisiert insbesondere $s - s'$ über $(\mathrm{IRes}\,Y)^{k-1} \xrightarrow{d} (\mathrm{IRes}\,Y)^k$, in anderen Worten, die Bilder von s und s' in $\mathrm{H}^k\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \mathrm{IRes}\,Y)$ stimmen überein, i.e. $[s] = [s']$; cf. Aufgabe 55.(1).

Seien nun E, $E' \in \mathrm{ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y)$ mit $E \sim E'$ gegeben. Wir dürfen annehmen, daß E und E' elementar äquivalent sind. Sei s der aus einem gewählten Diagramm $(**)$ mit E als unterer Zeile resultierende Morphismus. Komposition von $(**)$ mit einem Diagramm der Form $(*)$ zeigt, daß s auch aus einem Diagramm mit unterer Zeile E' resultieren kann. Also ist $\longmapsto$ auf $\mathrm{ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y)$ wohldefiniert.

Zeigen wir, daß $\longleftarrow\!\!\!\mid$ *wie angegeben wohldefiniert ist.* Seien $s,\ \tilde{s} \in \mathrm{Z}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \operatorname{IRes} Y)$ gegeben, deren Bild in $\mathrm{H}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \operatorname{IRes} Y)$ übereinstimmt, i.e. $[s] = [\tilde{s}]$. Sei also $s - \tilde{s} = hd$ für ein $h : X \longrightarrow (\operatorname{IRes} Y)^{k-1}$. Da $sd = 0$, gibt es ein $t : X \longrightarrow \mathrm{I}_d$ mit $t\dot{d} = s$. Da $\tilde{s}d = 0$, gibt es ein $\tilde{t} : X \longrightarrow \mathrm{I}_d$ mit $\tilde{t}\dot{d} = \tilde{s}$. Es ist $(t - \tilde{t})\dot{d} = s - \tilde{s} = hd = h\bar{d}\dot{d}$. Also ist $t - \tilde{t} = h\bar{d}$.

Wir bilden Pullbacks und erhalten mit Kern-Cokern-Kriterium, Lemma 134, und isomorpher Ersetzung folgende Morphismen kurz exakter Sequenzen.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{I}_d \arrow[r, "\dot{d}"] \arrow[d, equal] & (\operatorname{IRes} Y)^{k-1} \arrow[r, "\bar{d}"] & \mathrm{I}_d \\
\mathrm{I}_d \arrow[r] & M^{k-1} \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\llcorner"] & X \arrow[u, "t"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{I}_d \arrow[r, "\dot{d}"] \arrow[d, equal] & (\operatorname{IRes} Y)^{k-1} \arrow[r, "\bar{d}"] & \mathrm{I}_d \\
\mathrm{I}_d \arrow[r] & \tilde{M}^{k-1} \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\llcorner"] & X \arrow[u, "\tilde{t}"']
\end{tikzcd}$$

Dank Lemma 195 gibt es folgenden Isomorphismus kurz exakter Sequenzen.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{I}_d \arrow[r] \arrow[d, equal] & M^{k-1} \arrow[r] & X \arrow[d, equal] \\
\mathrm{I}_d \arrow[r] & \tilde{M}^{k-1} \arrow[u, "\wr"'] \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

Also liefert die Konstruktion $(***)$, i.e. das Zusammenfügen von $(Y, (\operatorname{IRes} Y)^0, \ldots, (\operatorname{IRes} Y)^{k-2}, \mathrm{I}_d)$ mit $(\mathrm{I}_d, M^{k-1}, \mathrm{I}_d)$ resp. mit $(\mathrm{I}_d, \tilde{M}^{k-1}, \mathrm{I}_d)$, äquivalente untere Zeilen. Also ist $\longleftarrow\!\!\!\mid$ auf $\mathrm{H}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \operatorname{IRes} Y) = \operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X, Y)$ wohldefiniert.

Wir erkennen, daß $\longleftarrow\!\!\!\mid$*, gefolgt von* $\longmapsto$ *die Identität liefert.*

Zeigen wir, daß $\longmapsto$*, gefolgt von* $\longleftarrow\!\!\!\mid$ *die Identität liefert.*

Sei $E = (Y \longrightarrow M^0 \longrightarrow M^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M^{k-2} \longrightarrow M^{k-1} \longrightarrow X) \in \hat{\operatorname{ext}}^k_{\mathcal{A}}(X, Y)$. Schreibe kurz $I := \operatorname{IRes} Y$. Anwendung beider Abbildungen liefert folgendes Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r] \arrow[dd, equal] \arrow[dr, equal] & I^0 \arrow[r] \arrow[dr, equal] & \cdots \arrow[r] & I^{k-2} \arrow[r] \arrow[dr, equal] & I^{k-1} \arrow[r] & I^k \arrow[r] & I^{k+1} \\
& Y \arrow[r] \arrow[u] & I^0 \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \arrow[r] \arrow[u] & I^{k-2} \arrow[r] \arrow[u] & \tilde{M}^{k-1} \arrow[r] \arrow[u] \arrow[ul] \arrow[dr, phantom, "\llcorner"] & X \arrow[r] \arrow[u] \arrow[ul, "s"] & 0 \arrow[u] \arrow[ul] \\
Y \arrow[r] & M^0 \arrow[r] \arrow[u] \arrow[ur] & \cdots \arrow[r] & M^{k-2} \arrow[r] \arrow[u] \arrow[ur] & M^{k-1} \arrow[r] \arrow[u] \arrow[ur, dotted] & X \arrow[r] \arrow[u, "s"] \arrow[ur, equal] & 0 \arrow[u] \arrow[ur, equal]
\end{tikzcd}$$

Die Äquivalenzklasse der unteren Zeile wird insgesamt auf die der mittleren abgebildet. Der Morphismus $M^{k-1} \longrightarrow \tilde{M}^{k-1}$ ist eindeutig existent bezüglich der Kommutativität von $(M^{k-1}, \tilde{M}^{k-1}, I^{k-1})$ und von $(M^{k-1}, X, \tilde{M}^{k-1}, X)$. Uns bleibt zu zeigen, daß das Viereck $(M^{k-2}, M^{k-1}, I^{k-2}, \tilde{M}^{k-1})$ kommutiert. Zum einen ist

$$\begin{aligned}
(M^{k-2} \longrightarrow M^{k-1} \longrightarrow \tilde{M}^{k-1} \longrightarrow X) &= (M^{k-2} \longrightarrow M^{k-1} \longrightarrow X) \\
&= (M^{k-2} \xrightarrow{0} X) \\
&= (M^{k-2} \longrightarrow I^{k-2} \longrightarrow \tilde{M}^{k-1} \longrightarrow X)\ .
\end{aligned}$$

Zum anderen ist

$$\begin{aligned}(M^{k-2} \longrightarrow M^{k-1} \longrightarrow \tilde{M}^{k-1} \longrightarrow I^{k-1}) &= (M^{k-2} \longrightarrow M^{k-1} \longrightarrow I^{k-1}) \\ &= (M^{k-2} \longrightarrow I^{k-2} \longrightarrow I^{k-1}) \\ &= (M^{k-2} \longrightarrow I^{k-2} \longrightarrow \tilde{M}^{k-1} \longrightarrow I^{k-1})\ .\end{aligned}$$

Die Monomorphie des Morphismus $\tilde{M}^{k-1} \longrightarrow X \oplus I^{k-1}$ aus der linksexakten Diagonalsequenz des Pullbacks $(\tilde{M}^{k-1}, X, I^{k-1}, I^k)$ gibt also $(M^{k-2} \longrightarrow M^{k-1} \longrightarrow \tilde{M}^{k-1}) = (M^{k-2} \longrightarrow I^{k-2} \longrightarrow \tilde{M}^{k-1})$.

Dieses Argument ist auch im Fall $k = 1$ gültig, sofern wir $(M^{-1} \longrightarrow I^{-1}) := (Y = Y)$ setzen. ▫

Zusammenfassung 197 Habe $\mathcal{A}$ genügend Injektive und genügend Projektive. Seien $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Sei $k \geqslant 1$.

Stellen wir einmal alle erhaltenen Interpretationen von $\operatorname{Ext}^k(X, Y)$ zusammen.

$$\begin{aligned}\operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X, Y) &\simeq \mathrm{H}^k\mathrm{t}\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(\operatorname{PRes} X, \operatorname{IRes} Y) \\ &\simeq \mathrm{H}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \operatorname{IRes} Y) \\ &\simeq \mathrm{H}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(\operatorname{PRes} X, Y) \\ &\simeq \operatorname{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}\big((\operatorname{Konz} X), (\operatorname{IRes} Y)[k]\big) \\ &\simeq \operatorname{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}\big((\operatorname{IRes} X), (\operatorname{IRes} Y)[k]\big) \\ &\simeq \operatorname{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}\big((\operatorname{PRes} X), (\operatorname{Konz} Y)[k]\big) \\ &\simeq \operatorname{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}\big((\operatorname{PRes} X), (\operatorname{PRes} Y)[k]\big) \\ &\simeq \operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(X, Y)\end{aligned}$$

Cf. Beispiel 181.(1), Korollar 187, Bemerkung 188, Satz 196 und duale Aussagen.

Im allgemeinen ist aber natürlich $\operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X, Y) \not\simeq \operatorname{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}\big((\operatorname{Konz} X), (\operatorname{Konz} Y)[k]\big)$. Um diese Isomorphie zu erhalten, muß die Homotopiekategorie $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ noch durch die sogenannte *derivierte Kategorie* $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ ersetzt werden, die aus $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ durch formales Invertieren der Quasiisomorphismen hervorgeht, also durch einen Prozeß ähnlich dem in §7.2 unten beschriebenen.

Bemerkung 198 (Funktorialität) *Habe $\mathcal{A}$ genügend Injektive. Seien $X' \xrightarrow{x} X$ und $Y \xrightarrow{y} Y'$ in $\mathcal{A}$ gegeben. Sei $k \geqslant 1$. Kommutiere*

$$\begin{tikzcd} \operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(X, Y) \arrow[r, "\operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(x,y)"] \arrow[d, "\alpha^k_{X,Y}"', "\wr"] & \operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(X', Y') \arrow[d, "\wr"', "\alpha^k_{X',Y'}"] \\ \operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X, Y) \arrow[r, "\operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(x,y)"] & \operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X', Y')\ , \end{tikzcd}$$

i.e. definiere $\operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(x, y) := \alpha^k_{X,Y} \operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(x, y)(\alpha^k_{X',Y'})^{-1}$.

Schreibe $\operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(x, Y) := \operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(x, \mathrm{id}_Y)$ *und* $\operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(X, y) := \operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_X, y)$.

Sei $E = (Y \longrightarrow M^0 \longrightarrow M^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M^{k-2} \longrightarrow M^{k-1} \longrightarrow X) \in \hat{\operatorname{ext}}^k_{\mathcal{A}}(X, Y)$ *gegeben.*

(1) *Es wird* $[E]\operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(X,y)$ *repräsentiert durch die untere Zeile des folgenden kommutativen Diagramms.*

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r] \arrow[d, "y"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & M^0 \arrow[r] \arrow[d] & M^1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[r] & M^{k-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & X \arrow[d, equal] \\
Y' \arrow[r] & M'^0 \arrow[r] & M^1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & M^{k-1} \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

Der Pushout ist beliebig gewählt. Es ist $M'^0 \longrightarrow M^1$ *charakterisiert durch die Kommutativität von* (M^0, M^1, M'^0, M^1) *und durch* $(Y' \longrightarrow M'^0 \longrightarrow M^1) = (Y' \xrightarrow{0} M^1)$.

(2) *Es wird* $[E]\operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(x,Y)$ *repräsentiert durch die untere Zeile des folgenden kommutativen Diagramms.*

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & M^0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[r] & M^{k-2} \arrow[r] \arrow[d, equal] & M^{k-1} \arrow[r] & X \\
Y \arrow[r] & M^0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & M^{k-2} \arrow[r] & M'^{k-1} \arrow[r] \arrow[u] \arrow[ur, phantom, "\llcorner"] & X' \arrow[u, "x"']
\end{tikzcd}$$

Der Pullback ist beliebig gewählt. Es ist $M^{k-2} \longrightarrow M'^{k-1}$ *charakterisiert durch die Kommutativität von* $(M^{k-2}, M'^{k-1}, M^{k-2}, M^{k-1})$ *und durch* $(M^{k-2} \longrightarrow M'^{k-1} \longrightarrow X') = (M^{k-2} \xrightarrow{0} X')$.

(3) *Es ist* $\operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(x,y) = \operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(X,y)\operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(x,Y') = \operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(x,Y)\operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(X',y)$.

Beweis.

Zu (1). Zunächst bemerken wir, daß das Diagramm wie in (1) behauptet existiert und auch seine untere Zeile E' lang exakt ist; cf. Kern-Cokern-Kriterium, Lemma 134°.

Schreibe $I := \operatorname{IRes} Y$ und $I' := \operatorname{IRes} Y'$. Sei pars pro toto $k = 2$. Konstruiere weiter zu folgendem kommutativen Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[rr] \arrow[dl, "y"'] \arrow[dd, equal] & & M^0 \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & M^1 \arrow[rr] \arrow[dd] & & X \arrow[dd, "s"] \arrow[dd, equal, shift right] \\
Y' \arrow[rr] \arrow[dd, equal] & & M'^0 \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[ur, phantom, "\lrcorner"] & & M^1 \arrow[rr] \arrow[dd] & & X \arrow[dd] & \\
 & Y \arrow[rr, "(eY)^0"] \arrow[dl, "y"'] & & I^0 \arrow[rr] \arrow[dl] & & I^1 \arrow[rr, "s\tilde{y}"] \arrow[dl] & & I^2 \arrow[dl, "\tilde{y}"] \\
Y' \arrow[rr, "(eY')^0"] & & I'^0 \arrow[rr] & & I'^1 \arrow[rr] & & I'^2 &
\end{tikzcd}$$

Hierbei entstammen die Morphismen $I^i \longrightarrow J^i$ für $i \in [0,2]$ einem Repräsentanten von $\operatorname{IRes} y$; cf. Definition 160, cf. auch Treuheit im Beweis zu Lemma 149.

Ferner sei der Morphismus $M'^0 \longrightarrow I'^0$ vom Pushout induziert. Das Viereck (M'^0, M^1, I'^0, I'^1) kommutiert, da dies nach Vorkomposition mit $Y' \longrightarrow M'^0$ und mit $M^0 \longrightarrow M'^0$ der Fall ist.

Es ist $[E]\alpha^2_{X,Y} = [s] \in \mathrm{H}^2 \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, I) = \operatorname{Ext}^2_{\mathcal{A}}(X, Y)$. Es ist $[s] \operatorname{Ext}^2_{\mathcal{A}}(X, y) = [s]\mathrm{H}^2 \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \operatorname{IRes} y) = [s\tilde{y}] \in \mathrm{H}^2 \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, I') = \operatorname{Ext}^2_{\mathcal{A}}(X, Y')$; cf. Definition 159.

Die Vorderseite des Diagramms zeigt, daß $[E']\alpha^2_{X,Y'} = [s\tilde{y}]$.

Zu (2). Zunächst bemerken wir, daß das Diagramm wie in (2) behauptet existiert und auch seine untere Zeile E' lang exakt ist; cf. Kern-Cokern-Kriterium, Lemma 134.

Schreibe $I := \operatorname{IRes} Y$. Konstruiere weiter zu folgendem kommutativen Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & I^0 \arrow[r] & I^1 \arrow[r] & I^2 \\
Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & M^0 \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d, equal] & M^1 \arrow[r] \arrow[u] & X \arrow[u, "s"'] \\
Y \arrow[r] & M^0 \arrow[r] & M'^1 \arrow[r] \arrow[u] \arrow[ur, phantom, "\llcorner"] & X' \arrow[u, "x"']
\end{tikzcd}$$

Es ist $[E]\alpha^2_{X,Y} = [s] \in \mathrm{H}^2 \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, I) = \operatorname{Ext}^2_{\mathcal{A}}(X, Y)$. Es ist $[s] \operatorname{Ext}^2_{\mathcal{A}}(x, Y) = [s]\mathrm{H}^2 \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(x, \operatorname{IRes} Y) = [xs] \in \mathrm{H}^2 \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X', I) = \operatorname{Ext}^2_{\mathcal{A}}(X', Y)$. Durch Betrachtung der oberen und der unteren Zeile erkennen wir, daß $[E']\alpha^2_{X',Y} = [xs]$.

Zu (3). Für die erste Gleichheit rechnen wir

$$\begin{aligned}
\operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(x, y) &= \alpha^k_{X,Y} \operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(x, y)(\alpha^k_{X',Y'})^{-1} \\
&= \alpha^k_{X,Y} \operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X, y) \operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(x, Y')(\alpha^k_{X',Y'})^{-1} \\
&= \alpha^k_{X,Y} \operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X, y)\alpha^k_{X,Y'}(\alpha^k_{X,Y'})^{-1} \operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(x, Y')(\alpha^k_{X',Y'})^{-1} \\
&= \operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(X, y) \operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(x, Y') \ .
\end{aligned}$$

Für die zweite Gleichheit entsprechend. □

Beispiel 199 (Negation) Habe $\mathcal{A}$ genügend Injektive. Sei $k \geqslant 1$. Schreibe $I := \operatorname{IRes} Y$.

Sei $E = (Y \longrightarrow M^0 \longrightarrow M^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M^{k-2} \longrightarrow M^{k-1} \xrightarrow{r} X) \in \hat{\operatorname{ext}}^k_{\mathcal{A}}(X, Y)$. Sei

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & I^0 \arrow[r, "d"] & I^1 \arrow[r, "d"] & \cdots \arrow[r, "d"] & I^{k-1} \arrow[r, "d"] & I^k \arrow[r, "d"] & I^{k+1} \\
Y \arrow[r] & M^0 \arrow[r] \arrow[u, "f^0"'] & M^1 \arrow[r] \arrow[u, "f^1"'] & \cdots \arrow[r] & M^{k-1} \arrow[r, "r"] \arrow[u, "f^{k-1}"'] & X \arrow[r] \arrow[u, "s"'] & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

kommutativ. Es ist $[E]\alpha^k_{X,Y} = [s] \in \mathrm{H}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, I)$. Nun ist auch

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & I^0 \arrow[r, "d"] & I^1 \arrow[r, "d"] & \cdots \arrow[r, "d"] & I^{k-1} \arrow[r, "d"] & I^k \arrow[r, "d"] & I^{k+1} \\
Y \arrow[r] & M^0 \arrow[r] \arrow[u, "f^0"'] & M^1 \arrow[r] \arrow[u, "f^1"'] & \cdots \arrow[r] & M^{k-1} \arrow[r, "-r"] \arrow[u, "f^{k-1}"'] & X \arrow[r] \arrow[u, "-s"'] & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

kommutativ. Schreibe $E' := (Y \longrightarrow M^0 \longrightarrow M^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M^{k-2} \longrightarrow M^{k-1} \xrightarrow{-r} X)$. Letzteres kommutative Diagramm zeigt, daß

$$[E']\alpha^k_{X,Y} \;=\; [-s] \;=\; -[s] \;=\; -([E]\alpha^k_{X,Y})\;.$$

Beispiel 200 (Addition) Habe $\mathcal{A}$ genügend Injektive. Sei $k \geqslant 1$. Schreibe $I := \operatorname{IRes} Y$. Seien

$$\begin{aligned} E &= (Y \xrightarrow{i} M^0 \xrightarrow{m} M^1 \xrightarrow{m} \cdots \xrightarrow{m} M^{k-2} \xrightarrow{m} M^{k-1} \xrightarrow{r} X) \;\in\; \hat{\operatorname{ext}}^k_{\mathcal{A}}(X,Y)\;,\\ \tilde{E} &= (Y \xrightarrow{\tilde{i}} \tilde{M}^0 \xrightarrow{\tilde{m}} \tilde{M}^1 \xrightarrow{\tilde{m}} \cdots \xrightarrow{\tilde{m}} \tilde{M}^{k-2} \xrightarrow{\tilde{m}} \tilde{M}^{k-1} \xrightarrow{\tilde{r}} \tilde{X}) \;\in\; \hat{\operatorname{ext}}^k_{\mathcal{A}}(X,Y)\;. \end{aligned}$$

Seien

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "(eY)^0"] \arrow[d, equal] & I^0 \arrow[r, "d"] & \cdots \arrow[r, "d"] & I^{k-1} \arrow[r, "d"] & I^k \\ Y \arrow[r, "i"] & M^0 \arrow[r, "m"] \arrow[u, "f^0"] & \cdots \arrow[r, "m"] & M^{k-1} \arrow[r, "m"] \arrow[u, "f^{k-1}"] & X \arrow[u, "s"] \end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "(eY)^0"] \arrow[d, equal] & I^0 \arrow[r, "d"] & \cdots \arrow[r, "d"] & I^{k-1} \arrow[r, "d"] & I^k \\ Y \arrow[r, "\tilde{i}"] & \tilde{M}^0 \arrow[r, "\tilde{m}"] \arrow[u, "\tilde{f}^0"] & \cdots \arrow[r, "\tilde{m}"] & \tilde{M}^{k-1} \arrow[r, "\tilde{m}"] \arrow[u, "\tilde{f}^{k-1}"] & X \arrow[u, "\tilde{s}"] \end{tikzcd}$$

kommutativ. Es ist $[E]\alpha^k_{X,Y} = [s]$ und $[\tilde{E}]\alpha^k_{X,Y} = [\tilde{s}]$ in $\mathrm{H}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X,I) = \operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y)$.

Beachte, daß die direkte Summe zweier lang exakter Sequenzen e.g. nach Aufgabe 61.(1) oder nach Aufgabe 60 lang exakt ist.

Schreibe $\hat{I} := \operatorname{IRes}(Y \oplus Y)$. Wähle ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} Y \oplus Y \arrow[r, "(e(Y\oplus Y))^0"] \arrow[d, equal] & \hat{I}^0 \arrow[r, "d"] & \hat{I}^1 \arrow[r, "d"] & \cdots \\ Y \oplus Y \arrow[r, "\begin{pmatrix} (eY)^0 & 0 \\ 0 & (eY)^0 \end{pmatrix}"] \arrow[d, equal] & I^0 \oplus I^0 \arrow[r, "\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}"] \arrow[u, "b^0"] & I^1 \oplus I^1 \arrow[r, "\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}"] \arrow[u, "b^1"] & \cdots \\ Y \oplus Y \arrow[r, "(e(Y\oplus Y))^0"] & \hat{I}^0 \arrow[r, "d"] \arrow[u, "a^0"] & \hat{I}^1 \arrow[r, "d"] \arrow[u, "a^1"] & \cdots \end{tikzcd}\;,$$

so daß [sic] ab und ba in der Homotopiekategorie Identitäten sind; cf. Beweise zu Voll- und Treuheit für Lemma 149. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Y \oplus Y \arrow[r, "\begin{pmatrix} (eY)^0 & 0 \\ 0 & (eY)^0 \end{pmatrix}"] \arrow[d, equal] & I^0 \oplus I^0 \arrow[r, "\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}"] & \cdots \arrow[r, "\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}"] & I^{k-1} \oplus I^{k-1} \arrow[r, "\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}"] & I^k \oplus I^k \arrow[r, "\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}"] & \cdots \\ Y \oplus Y \arrow[r, "\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & \tilde{i} \end{pmatrix}"] & M^0 \oplus \tilde{M}^0 \arrow[r, "\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & \tilde{m} \end{pmatrix}"] \arrow[u, "\begin{pmatrix} f^0 & 0 \\ 0 & \tilde{f}^0 \end{pmatrix}"] & \cdots \arrow[r, "\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & \tilde{m} \end{pmatrix}"] & M^{k-1} \oplus \tilde{M}^{k-1} \arrow[r, "\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \tilde{r} \end{pmatrix}"] \arrow[u, "\begin{pmatrix} f^{k-1} & 0 \\ 0 & \tilde{f}^{k-1} \end{pmatrix}"] & X \oplus X \arrow[u, "\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & \tilde{s} \end{pmatrix}"] \end{tikzcd}\;,$$

dessen untere Zeile wir mit $E \oplus \tilde{E}$ bezeichnen, zeigt, daß $[E \oplus \tilde{E}]\alpha^k_{X\oplus X, Y\oplus Y} = [\left(\begin{smallmatrix} s & 0 \\ 0 & \tilde{s} \end{smallmatrix}\right) b^k] \in \mathrm{H}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X \oplus X, \hat{I}) = \operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X \oplus X, Y \oplus Y)$.

Das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "(eY)^0"] & I^0 \arrow[r, "d"] & I^1 \arrow[r, "d"] & \cdots \\
Y \oplus Y \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} (eY)^0 & 0 \\ 0 & (eY)^0 \end{smallmatrix}\right)"] & I^0 \oplus I^0 \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)"] & I^1 \oplus I^1 \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

zeigt, daß $\operatorname{IRes}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ durch $a\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ repräsentiert wird; cf. Definition 160, Treuheit im Beweis zu Lemma 149.

Nun kommt $[\left(\begin{smallmatrix} s & 0 \\ 0 & \tilde{s} \end{smallmatrix}\right) b^k] \in \mathrm{H}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X \oplus X, \hat{I}) = \operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X \oplus X, Y \oplus Y)$ unter

$$\operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)) \;=\; \mathrm{H}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \operatorname{IRes}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)) \;=\; \mathrm{H}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), a\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$$

auf $[\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} s & 0 \\ 0 & \tilde{s} \end{smallmatrix}\right) b^k a^k \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)] = [\left(\begin{smallmatrix} s & \tilde{s} \end{smallmatrix}\right) b^k a^k \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)] \in \mathrm{H}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, I) = \operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X, Y)$.

Da $I \oplus I \xrightarrow{ba} I \oplus I$ und $I \oplus I \xrightarrow{\mathrm{id}} I \oplus I$ in der Homotopiekategorie denselben Morphismus repräsentieren, gilt das auch für $ba\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, und somit stimmen die Abbildungen $\mathrm{H}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, ba\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$ und $\mathrm{H}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$ überein; cf. §5.3 und Bemerkung 144. Erstere schickt $[\left(\begin{smallmatrix} s & \tilde{s} \end{smallmatrix}\right)]$ auf $[\left(\begin{smallmatrix} s & \tilde{s} \end{smallmatrix}\right) b^k a^k \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)]$, zweitere auf $[\left(\begin{smallmatrix} s & \tilde{s} \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)] = [s + \tilde{s}] = [s] + [\tilde{s}] = [E]\alpha^k_{X,Y} + [\tilde{E}]\alpha^k_{X,Y}$ in $\mathrm{H}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, I) = \operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X, Y)$.

Zusammenfassend haben wir ausgerechnet, daß

$$\begin{aligned}
[E \oplus \tilde{E}]\alpha^k_{X\oplus X, Y\oplus Y} \operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)) &= [\left(\begin{smallmatrix} s & 0 \\ 0 & \tilde{s} \end{smallmatrix}\right) b^k] \operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)) \\
&= [\left(\begin{smallmatrix} s & \tilde{s} \end{smallmatrix}\right) b^k a^k \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)] \\
&= [\left(\begin{smallmatrix} s & \tilde{s} \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)] \\
&= [s] + [\tilde{s}] \\
&= [E]\alpha^k_{X,Y} + [\tilde{E}]\alpha^k_{X,Y} \;.
\end{aligned}$$

Bilde folgendes kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
Y \oplus Y \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & \tilde{i} \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & M^0 \oplus \tilde{M}^0 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} m & 0 \\ 0 & \tilde{m} \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d] & M^1 \oplus \tilde{M}^1 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} m & 0 \\ 0 & \tilde{m} \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} m & 0 \\ 0 & \tilde{m} \end{smallmatrix}\right)"] & M^{k-2} \oplus \tilde{M}^{k-2} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} m & 0 \\ 0 & \tilde{m} \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, equal] & M^{k-1} \oplus \tilde{M}^{k-1} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} r & 0 \\ 0 & \tilde{r} \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, equal] & X \oplus X \arrow[d, equal] \\
Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & \arrow[r] \arrow[d, equal] & \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[r] & \arrow[r] \arrow[d, equal] & \arrow[r] \arrow[d, equal] & X \oplus X \\
Y \arrow[r] & N^0 \arrow[r] & N^1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & N^{k-2} \arrow[r] & N^{k-1} \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\llcorner"] & X \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)"']
\end{tikzcd}$$

Gemäß Bemerkung 198 ist seine untere Zeile $\hat{E}$ ein Repräsentant von

$$[E \oplus \tilde{E}] \operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)) \;\in\; \operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(X, Y) \;.$$

Insgesamt ist also

$$[\hat{E}]\alpha^k_{X,Y} \;=\; [E]\alpha^k_{X,Y} + [\tilde{E}]\alpha^k_{X,Y}\;;$$

cf. Bemerkung 198. Man nennt $[\hat{E}]$ auch die *Baersumme* von $[E]$ und $[\tilde{E}]$.

Beispiel 201 (Konnektor) Habe $\mathcal{A}$ genügend Injektive und genügend Projektive. Sei

$$Y' \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{s} Y''$$

eine kurz exakte Sequenz in $\mathcal{A}$. Sei $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Schreibe $P := \operatorname{PRes} X$.

Wir haben die kurz exakte Sequenz $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(P,Y') \xrightarrow{(-)j} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(P,Y) \xrightarrow{(-)s} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(P,Y'')$. Nach Aufgabe 69 ist die lang exakte Homologiesequenz auf dieser isomorph zur lang exakten $\mathrm{R}^*\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X,-) = \operatorname{Ext}^*_{\mathcal{A}}(X,-)$-Sequenz auf (Y',Y,Y'').

Sei $k \geqslant 1$. Sei $\mathrm{H}^k\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(P,Y'') \xrightarrow{\partial := \partial^k_{(-)j,(-)s}} \mathrm{H}^{k+1}\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(P,Y')$ der Konnektor unserer lang exakten Homologiesequenz an dieser Stelle.

Nach Satz 196° haben wir den dort konstruierten Isomorphismus

$$\operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y'') \xrightarrow[\sim]{\beta^k_{X,Y''}} \mathrm{H}^k\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(P,Y'')$$

Sei

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y'') \arrow[r, "\partial^{\mathrm{Yon}}"] \arrow[d, "\beta^k_{X,Y''}"', "\wr"] & \operatorname{ext}^{k+1}_{\mathcal{A}}(X,Y') \arrow[d, "\wr"', "\beta^{k+1}_{X,Y'}"] \\
\mathrm{H}^k\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(P,Y'') \arrow[r, "\partial"] & \mathrm{H}^{k+1}\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(P,Y')
\end{tikzcd}$$

kommutativ. Wir wollen $-\partial^{\mathrm{Yon}}$ berechnen. Sei hierzu

$$E \;=\; (Y'' \xrightarrow{i} M_{k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_0 \longrightarrow X) \;\in\; \hat{\operatorname{ext}}^k_{\mathcal{A}}(X,Y'')$$

gegeben. Bilde ein kommutatives Diagramm wie folgt.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{k+1} \arrow[r, "d"] \arrow[d] & P_k \arrow[r] \arrow[d, "t"'] & P_{k-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, equal] \\
 & 0 \arrow[r] & Y'' \arrow[r, "i"] & M_{k-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & M_0 \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

Es ist $[E]\beta^k_{X,Y''} = [t] \in \mathrm{H}^k\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(P,Y'')$.

Nun ist ∂ der Konnektor folgender Schlangenlemmasequenz; cf. §5.4.4.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^k(P,Y') \arrow[r] \arrow[d, dot] & \mathrm{H}^k(P,Y) \arrow[r] \arrow[d, dot] & \mathrm{H}^k(P,Y'') \arrow[d, dot] \arrow[ddll, dotted, "\partial"] \\
\tilde{\mathrm{Z}}^k(P,Y') \arrow[r] \arrow[dd] & \tilde{\mathrm{Z}}^k(P,Y) \arrow[r, "\tilde{\mathrm{Z}}^k(P,s)", mapsto] \arrow[dd, "\hat{d}^k_{(P,Y)}"'] & \tilde{\mathrm{Z}}^k(P,Y'') \arrow[dd] \\
\mathrm{Z}^{k+1}(P,Y') \arrow[r, "\mathrm{Z}^{k+1}(P,j)", dot] \arrow[d, mapsto] & \mathrm{Z}^{k+1}(P,Y) \arrow[r] \arrow[d, mapsto] & \mathrm{Z}^{k+1}(P,Y'') \arrow[d, mapsto] \\
\mathrm{H}^{k+1}(P,Y') \arrow[r] & \mathrm{H}^{k+1}(P,Y) \arrow[r] & \mathrm{H}^{k+1}(P,Y'')
\end{tikzcd}$$

Bilde ein kommutatives Diagramm wie folgt.

$$\begin{tikzcd}
 & P_{k+1} \arrow[r, "d"] \arrow[dl, "w"'] \arrow[d, "v"'] & P_k \arrow[dl, "u"'] \arrow[d, "t"] \\
Y' \arrow[r, "j"] & Y \arrow[r, "s"] & Y''
\end{tikzcd}$$

Beachte hierbei, daß $vs = dt = 0$.

Das Bild von u in $\tilde{\mathrm{Z}}^k(P,Y)$ wird also in unserem Schlangenlemmadiagramm horizontal auf das Bild von t in $\tilde{\mathrm{Z}}^k(P,Y'')$ und vertikal auf $v \in \mathrm{Z}^{k+1}(P,Y)$ abgebildet. Schließlich wird $w \in \mathrm{Z}^{k+1}(P,Y')$ horizontal auf $v \in \mathrm{Z}^{k+1}(P,Y)$ abgebildet.

Gemäß Aufgabe 70 bildet $-\partial$ also das Bild von t in $\mathrm{H}^k(P,Y'') = \mathrm{H}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(P,Y'')$ auf das Bild von w in $\mathrm{H}^{k+1}(P,Y') = \mathrm{H}^{k+1} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(P,Y')$ ab.

Betrachte folgendes kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
P_{k+1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "w"'] & P_k \arrow[rr] \arrow[d, "u"'] \arrow[ddr, "t"] & & P_{k-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, equal] \\
Y' \arrow[r, "j"] & Y \arrow[dr, "s"'] & & M_{k-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & M_0 \arrow[r] & X \\
 & & Y'' \arrow[ur, "i"'] & & & &
\end{tikzcd}$$

Dieses zeigt, daß die Äquivalenzklasse von $(Y' \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{si} M_{k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_0 \longrightarrow X)$ unter $\beta^{k+1}_{X,Y'}$ auf das Bild von w in $\mathrm{H}^{k+1} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(P,Y')$ kommt.

Alles in allem bildet $-\partial^{\mathrm{Yon}}$ also die Äquivalenzklasse von

$$(Y'' \xrightarrow{i} M_{k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_0 \longrightarrow X) \;\in\; \hat{\mathrm{ext}}^k_{\mathcal{A}}(X, Y'')$$

auf die Äquivalenzklasse von

$$(Y' \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{si} M_{k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_0 \longrightarrow X) \;\in\; \hat{\mathrm{ext}}^{k+1}_{\mathcal{A}}(X, Y')$$

ab. Kurz, dazu muß $Y' \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{s} Y''$ von links an einen Repräsentanten angefügt werden.

Beispiel 202 (Produkte) Habe $\mathcal{A}$ genügend Injektive. Seien $k,\, \ell \geqslant 1$.

Strukturtransport gibt uns die mißbräuchlich wieder mit $(\star)$ bezeichnete $\mathbf{Z}$-bilineare Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y) & \times & \mathrm{ext}^\ell_{\mathcal{A}}(Y,Z) & \xrightarrow{(\star)} & \mathrm{ext}^{k+\ell}_{\mathcal{A}}(X,Z) \\ ([E] & , & [F]) & \longmapsto & [E]\star[F] \;:=\; \big([E]\alpha^k_{X,Y} \star [F]\alpha^\ell_{Y,Z}\big)(\alpha^{k+\ell}_{X,Z})^{-1}\;; \end{array}$$

cf. Definition 191, Satz 196.

Wie wollen einen Repräsentanten von $[E]\star[F]$ berechnen. Schreibe hierzu

$$\begin{array}{rcll} E & = & (Y \xrightarrow{i} M^0 \xrightarrow{m} M^1 \xrightarrow{m} \cdots \xrightarrow{m} M^{k-2} \xrightarrow{m} M^{k-1} \xrightarrow{r} X) & \in\; \hat{\mathrm{ext}}^k_{\mathcal{A}}(X,Y)\;, \\ F & = & (Z \xrightarrow{j} N^0 \xrightarrow{n} N^1 \xrightarrow{n} \cdots \xrightarrow{n} N^{\ell-2} \xrightarrow{n} N^{\ell-1} \xrightarrow{s} Y) & \in\; \hat{\mathrm{ext}}^\ell_{\mathcal{A}}(Y,Z)\;. \end{array}$$

Schreibe $I := \mathrm{IRes}\, X$, $J := \mathrm{IRes}\, Y$ und $K := \mathrm{IRes}\, Z$.

Fall $k \geqslant 1$ und $\ell \geqslant 1$. Sei pars pro toto $k = 2$ und $\ell = 2$. Konstruiere ein kommutatives Diagramm wie folgt.

$$\begin{tikzcd}
 & & & Y \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & M^0 \arrow[r, "m"] \arrow[d] & M^1 \arrow[r, "r"] \arrow[d] & X \arrow[r, "(eX)^0"] \arrow[dr, "u"] & I^0 \arrow[r, "d"] \arrow[d] & I^1 \arrow[r, "d"] \arrow[d] & \cdots \\
Z \arrow[r, "j"] \arrow[d, equal] & N^0 \arrow[r, "n"] \arrow[d] & N^1 \arrow[r, "s"] \arrow[d] & Y \arrow[r, "(eY)^0"] \arrow[dr, "v"] & J^0 \arrow[r, "(-1)^k d"] \arrow[d] & J^1 \arrow[rr, "(-1)^k d"] \arrow[d] & & J^2 \arrow[r, "(-1)^k d"] \arrow[d, "f"'] & J^3 \arrow[r, "(-1)^k d"] \arrow[d] & \cdots \\
Z \arrow[r, "(eZ)^0"] & K^0 \arrow[r, "(-1)^{k+\ell} d"] & K^1 \arrow[rr, "(-1)^{k+\ell} d"] & & K^2 \arrow[r, "(-1)^{k+\ell} d"] & K^3 \arrow[rr, "(-1)^{k+\ell} d"] & & K^4 \arrow[r, "(-1)^{k+\ell} d"] & K^5 \arrow[r, "(-1)^{k+\ell} d"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Beachte, daß die Kommutativität eines Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d"] & A^{-1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "g^{-1}"] & A^0 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "g^0"] & A^1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "g^1"] & A^2 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "g^2"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d"] & B^{-1} \arrow[r, "d"] & B^0 \arrow[r, "d"] & B^1 \arrow[r, "d"] & B^2 \arrow[r, "d"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

in $\mathcal{A}$ äquivalent ist zur Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d"] & A^{-1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "-g^{-1}"] & A^0 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "+g^0"] & A^1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "-g^1"] & A^2 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "+g^2"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "-d"] & B^{-1} \arrow[r, "-d"] & B^0 \arrow[r, "-d"] & B^1 \arrow[r, "-d"] & B^2 \arrow[r, "-d"] & \cdots
\end{tikzcd}\;.$$

Somit ist $[E]\alpha^k_{X,Y} = (-1)^{k\cdot k}[u] \in \mathrm{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y)$ und $[F]\alpha^\ell_{Y,Z} = (-1)^{\ell\cdot(k+\ell)}[v] \in \mathrm{Ext}^\ell_{\mathcal{A}}(Y,Z)$.

Nach Entfernen aller Objekte nicht aus I, J oder K erkennen wir im Diagramm oben $[u]\Psi^k(X,Y)$ und unten $[v]\Psi^\ell(Y,Z)[k]$; cf. Bemerkung 188. Nun kommt

$$[u]\Psi^k(X,Y) \star [v]\Psi^\ell(Y,Z) \;=\; [u]\Psi^k(X,Y) \cdot [v]\Psi^\ell(Y,Z)[k]$$

unter $\Psi^{k+\ell}(X,Z)^{-1}$ auf $[uf]$ in $\mathrm{Ext}^{k+\ell}_{\mathcal{A}}(X,Z)$. Insgesamt ist $[u] \star [v] = [uf]$; cf. Definition 191.

Zusammengesetzt ergibt sich folgendes kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "j", "\bullet"{marking}] \arrow[d, equal] & N^0 \arrow[r, "n"] \arrow[d] & N^1 \arrow[r, "si"] \arrow[d] & M^0 \arrow[r, "m"] \arrow[d] & M^1 \arrow[r, "r", "+"{marking}] \arrow[d] & X \arrow[d, "uf"] \\
Z \arrow[r, "(eZ)^0", "\bullet"{marking}] & K^0 \arrow[r, "(-1)^{k+\ell}d"] & K^1 \arrow[r, "(-1)^{k+\ell}d"] & K^2 \arrow[r, "(-1)^{k+\ell}d"] & K^3 \arrow[r, "(-1)^{k+\ell}d"] & K^4
\end{tikzcd}$$

Dieses zeigt, daß mit

$$G \;:=\; (Z \xrightarrow{j}\!\!\bullet\; N^0 \xrightarrow{n} N^1 \xrightarrow{si} M^0 \xrightarrow{m} M^1 \xrightarrow{r}\!\!+\; X)$$

die Äquivalenzklasse $[G]$ unter $\alpha^{k+\ell}_{X,Z}$ auf $(-1)^{(k+\ell)\cdot(k+\ell)}[uf]$ abgebildet wird. Wir erhalten so insgesamt

$$\begin{aligned}
[E] \star [F] &= ([E]\alpha^k_{X,Y} \star [F]\alpha^\ell_{Y,Z})(\alpha^{k+\ell}_{X,Z})^{-1} \\
&= (-1)^{k\cdot k+\ell\cdot(k+\ell)}([u] \star [v])(\alpha^{k+\ell}_{X,Z})^{-1} \\
&= (-1)^{k\cdot k+\ell\cdot(k+\ell)}[uf](\alpha^{k+\ell}_{X,Z})^{-1} \\
&= (-1)^{k\cdot k+\ell\cdot(k+\ell)+(k+\ell)\cdot(k+\ell)}[G] \\
&= (-1)^{k\cdot\ell}[G]\,.
\end{aligned}$$

Gehen wir zurück zum allgemeinen Fall, so erkennen wir, daß mit

$$G \;:=\; (\underbrace{Z \xrightarrow{j}\!\!\bullet\; N^0 \xrightarrow{n} \cdots \xrightarrow{n} N^{\ell-1}}_{\text{aus } F} \xrightarrow{si} \underbrace{M^0 \xrightarrow{m} \cdots \xrightarrow{m} M^{k-1} \xrightarrow{r}\!\!+\; X}_{\text{aus } E})$$

gilt, daß

$$[E] \star [F] \;=\; (-1)^{k\cdot\ell}[G]\,.$$

Warum aber $[E] \star [(Y' \longrightarrow Y \longrightarrow Y'')]$ in Beispiel 201 bis auf Vorzeichen das Bild von $[E]$ unter dem Konnektor ist, ist mir unklar. Obige Rechnungen liefern dies eben.

7.2 Lokalisierung an einer dicken Teilkategorie

Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie.

7.2.1 Dicke Teilkategorien $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{A}$

Definition 203 Eine volle Teilkategorie $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{A}$ heiße *dick,* falls sie ein Nullobjekt von $\mathcal{A}$ enthält, und falls für jede kurz exakte Sequenz $X' \longrightarrow X \longrightarrow X''$ in $\mathcal{A}$ genau dann das mittlere Objekt X in $\operatorname{Ob}\mathcal{N}$ liegt, wenn die beiden äußeren Objekte X' und X'' in $\operatorname{Ob}\mathcal{N}$ liegen.

Split kurz exakte Sequenzen zeigen, daß eine dicke Teilkategorie insbesondere eine volle additive Teilkategorie ist; cf. Definition 108. Ist ferner $X' \simeq X$ in $\mathcal{A}$, so ist genau dann $X' \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$, wenn $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Ferner ist eine dicke Teilkategorie $\mathcal{N}$ einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ selbst wieder abelsch, und der Inklusionsfunktor $\mathcal{N} \hookrightarrow \mathcal{A}$ ist exakt. In der Tat können Kerne und Cokerne in $\mathcal{N}$ bereits in $\mathcal{A}$ gebildet werden, die erforderlichen Eigenschaften vererben sich dann aus $\mathcal{A}$.

Ein Morphismus in $\mathcal{A}$, welcher einen Kern aus $\operatorname{Ob}\mathcal{N}$ und einen Cokern aus $\operatorname{Ob}\mathcal{N}$ hat, heiße $\mathcal{N}$-*Quasiisomorphismus*, symbolisch oft $X \Longrightarrow Y$ geschrieben ([8]). Es ist dann jeder Kern und jeder Cokern eines $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus in $\operatorname{Ob}\mathcal{N}$.

Beispiel 204

(1) Sei R ein Ring. Sei $\mathcal{A} = R$-Mod. Sei $M \subseteq R$ eine Teilmenge. Sei $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{A}$ die volle Teilkategorie der R-Linksmoduln X, für die ein $k \geqslant 0$ so existiert, daß $m_1 \cdot m_2 \cdots m_k \cdot x = 0$ für alle $m_1, m_2, \ldots, m_k \in M$ und alle $x \in X$.

Wir wollen zeigen, daß $\mathcal{N}$ eine dicke Teilkategorie von $\mathcal{A}$ ist. Es ist $0 \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Sei $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} X''$ eine kurz exakte Sequenz in $\mathcal{A}$.

Sei zum einen $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Sei $k \geqslant 0$ so, daß $m_1 \cdots m_k \cdot x = 0$ für alle $m_1, \ldots, m_k \in M$ und alle $x \in X$.

Sei $x' \in X'$. Seien $m_1, \ldots, m_k \in M$ gegeben. Dann ist $(m_1 \cdots m_k \cdot x')i = m_1 \cdots m_k \cdot (x'i) = 0$ und folglich $m_1 \cdots m_k \cdot x' = 0$. Also ist $X' \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$.

Sei $x'' \in X''$. Seien $m_1, \ldots, m_k \in M$ gegeben. Wähle $x \in X$ mit $xr = x''$. Dann ist $m_1 \cdots m_k \cdot x'' = m_1 \cdots m_k \cdot (xr) = (m_1 \cdots m_k \cdot x)r = 0$. Also ist $X'' \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$.

Seien zum anderen $X', X'' \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Sei $k' \geqslant 0$ so, daß $m_1 \cdots m_{k'} \cdot x' = 0$ für alle $m_1, \ldots, m_{k'} \in M$ und alle $x' \in X'$. Sei $k'' \geqslant 0$ so, daß $m_1 \cdots m_{k''} \cdot x'' = 0$ für alle $m_1, \ldots, m_{k''} \in M$ und alle $x'' \in X''$. Sei $x \in X$. Seien $m_1, \ldots, m_{k'+k''} \in M$. Es ist $(m_{k'+1} \cdots m_{k'+k''} \cdot x)r = m_{k'+1} \cdots m_{k'+k''} \cdot (xr) = 0$ und folglich $m_{k'+1} \cdots m_{k'+k''} \cdot x = x'i$ für ein $x' \in X'$. Nun ist $m_1 \cdots m_{k'+k''} \cdot x = m_1 \cdots m_{k'} \cdot (x'i) = (m_1 \cdots m_{k'} \cdot x')i = 0$. Also ist $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$.

[8] Nicht mit einer Identität oder einer Implikation verwechseln.

(2) Sei R ein Ring. Sei $\mathcal{A} = R$-Mod. Sei $M \subseteq R$ eine nichtleere Teilmenge so, daß $m{\cdot}m' \in M$ für alle $m,\, m' \in M$. Sei $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{A}$ die volle Teilkategorie der R-Linksmoduln X, für die ein $m \in M$ existiert mit $mx = 0$ für alle $x \in X$; kurz, mit $mX = 0$.

Wir wollen zeigen, daß $\mathcal{N}$ eine dicke Teilkategorie von $\mathcal{A}$ ist. Es ist $0 \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Sei $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} X''$ eine kurz exakte Sequenz in $\mathcal{A}$.

Sei zum einen $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Sei $m \in M$ so, daß $mX = 0$.

Sei $x' \in X'$. Es ist $(mx')i = m(x'i) = 0$, und also $mx' = 0$. Also ist $mX' = 0$, und mithin $X' \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$.

Sei $x'' \in X''$. Wähle $x \in X$ mit $xr = x''$. Dann ist $mx'' = m(xr) = (mx)r = 0$. Also ist $mX'' = 0$ und mithin $X'' \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$.

Seien zum anderen $X',\, X'' \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Sei $m' \in M$ so, daß $mX' = 0$. Sei $m'' \in M$ so, daß $m''X'' = 0$. Sei $x \in X$. Es ist $(m''x)r = m''(xr) = 0$. Also gibt es ein $x' \in X'$ mit $x'i = m''x$. Es wird $m'm''x = m'(x'i) = (m'x')i = 0$. Also ist $m'm''X = 0$ und wegen $m'm'' \in M$ mithin $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$.

(3) Sei R ein Ring. Sei $M \subseteq R$ eine Teilmenge. Sei $\mathcal{A} \subseteq R$-Mod die volle Teilkategorie der als Mengen endlichen R-Linksmoduln. Sei $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{A}$ die durch

$$\operatorname{Ob}\mathcal{N} \;:=\; \{X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A} \;:\; X \longrightarrow X,\, x \longmapsto mx \text{ ist bijektiv für alle } m \in M\}$$

gegebene volle Teilkategorie. Wir wollen zeigen, daß $\mathcal{N}$ eine dicke Teilkategorie von $\mathcal{A}$ ist. Es ist $0 \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Sei $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} X''$ eine kurz exakte Sequenz in $\mathcal{A}$. Wir betrachten den Morphismus

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "m\cdot(-)"'] & X \arrow[r, "r"] \arrow[d, "m\cdot(-)"'] & X'' \arrow[d, "m\cdot(-)"'] \\
X' \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, "r"] & X''
\end{tikzcd}$$

kurz exakter Sequenzen abelscher Gruppen für $m \in M$.

Sind $X',\, X'' \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$, so haben wir außen zwei vertikale Isomorphismen für $m \in M$. Es zeigt das Schlangenlemma, Lemma 136, daß dann auch der mittlere vertikale Morphismus ein Isomorphismus ist für $m \in M$. Also ist auch $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$.

Ist $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$, so haben wir in der Mitte einen vertikalen Isomorphismus für $m \in M$. Es folgt wieder mit dem Schlangenlemma (oder mit Komposition), daß dann der linke vertikale Morphismus monomorph und der rechte epimorph ist. Da aber X' und X'' endlich sind, folgt hieraus, daß außen zwei vertikale Isomorphismen stehen für $m \in M$. Also sind auch $X',\, X'' \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$.

(4) Sei $\mathcal{A} = \mathbf{Z}$-Mod. Sei darin $\mathcal{N} = \mathbf{Z}$-mod die Kategorie der endlich erzeugten $\mathbf{Z}$-Moduln; cf. Aufgabe 13. Gemäß Aufgabe 71 ist $\mathbf{Z}$-mod eine dicke Teilkategorie von $\mathbf{Z}$-Mod.

(5) Sei $\mathcal{A} = \mathbf{Z}$-mod; cf. (4). Sei $\mathcal{N} = \mathbf{Z}$-fin $\subseteq \mathbf{Z}$-mod die volle Teilkategorie der endlichen $\mathbf{Z}$-Moduln.

Sei $M = \mathbf{Z} \smallsetminus \{0\}$. Es ist $\mathcal{N}$ gerade die volle Teilkategorie der endlich erzeugten $\mathbf{Z}$-Moduln X, für die ein $m \in M$ so existiert, daß $mX = 0$; cf. Aufgabe 16. Das Argument aus (2) zeigt, daß $\mathcal{N}$ eine dicke Teilkategorie von $\mathcal{A}$ ist.

Diese Dickheit von $\mathcal{N}$ kann man auch direkt sehen, verwendet man die Tatsache, daß in einer kurz exakten Sequenz $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} X''$ von $\mathbf{Z}$-Moduln mit X' und X'' endlich gilt, daß $|X| = |X'||X''|$. In der Tat ist für alle $x'' \in X''$ nach Wahl eines $x \in X$ mit $xr = x''$ die Abbildung $X' \longrightarrow r^{-1}(\{x''\})$, $x' \longmapsto x'i + x$ bijektiv.

7.2.2 Eigenschaften von $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismen

Sei $\mathcal{N}$ eine dicke Teilkategorie der abelschen Kategorie $\mathcal{A}$.

Bemerkung 205 *Ist* $\cdots \longrightarrow X_{i-1} \longrightarrow X_i \longrightarrow X_{i+1} \longrightarrow \cdots$ *eine lang exakte Sequenz, ist* $i \in \mathbf{Z}$ *und sind* X_{i-1}, $X_{i+1} \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$, *so ist auch* $X_i \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$.

Beweis. Wähle Faktorisierungen

$$X_{i-2} \twoheadrightarrow J' \rightarrowtail X_{i-1} \twoheadrightarrow I' \rightarrowtail X_i \twoheadrightarrow I'' \rightarrowtail X_{i+1} \twoheadrightarrow J'' \rightarrowtail X_{i+2}\ ;$$

cf. Definition 130. Da $X_{i-1} \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$, ist auch $I' \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Da $X_{i+1} \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$, ist auch $I'' \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Da I', $I'' \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$, ist auch $X_i \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. ▫

Bemerkung 206 *Sei* $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ *in* $\mathcal{A}$ *gegeben. Sind aus* f, g, fg *zweie* $\mathcal{N}$*-Quasiisomorphismen, so alle.*

Beweis. Wir haben folgendes Umfangssequenzdiagramm; cf. Lemma 132.

$$\begin{tikzcd}
 & & M \arrow[rr] \arrow[dr, tail, "k"] & & C \arrow[ddr] & \\
 & & & Y \arrow[ur, two heads, "p"] \arrow[dr, two heads, "g"] & & \\
L \arrow[uurr] \arrow[rr, tail, "j"] & & X \arrow[ur, two heads, "f"] \arrow[rr, "fg"] & & Z \arrow[rr, two heads, "q"] \arrow[dr, two heads, "r"] & & D \arrow[dl, two heads] \\
 & K \arrow[ul, tail] \arrow[ur, tail, "i"] & & & & E &
\end{tikzcd}$$

Sind f und g zwei $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismen, so sind K, M, C, $E \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Mit Bemerkung 205 folgt, daß auch L und D in $\operatorname{Ob}\mathcal{N}$ liegen und somit fg ein $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus ist.

Sind f und fg zwei $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismen, so sind K, L, C, $D \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Mit Bemerkung 205 folgt, daß auch M und E in $\operatorname{Ob}\mathcal{N}$ liegen und somit g ein $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus ist.

Dual dazu, sind fg und g zwei $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismen, so auch f. ▫

Bemerkung 207 *Sei*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & Y \arrow[d] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \end{tikzcd}$$

ein Pullback in $\mathcal{A}$. Ist f' ein $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus, so auch f.

Beweis. Tragen wir horizonal Kerne und Cokerne ein, so erhalten wir ein kommutatives Diagramm wie folgt; cf. Kern-Cokern-Kriterium, Lemma 134.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\bullet"] \arrow[d, "\wr"'] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & Y \arrow[r, "\vdash"] \arrow[d] & C \arrow[d, "\bullet"] \\ K' \arrow[r, "\bullet"] & X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[r, "\vdash"] & C' \end{tikzcd}$$

Ist f' ein $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus, dann sind K', $C' \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Folglich sind auch K, $C \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Somit ist f ein $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus. ▫

Bemerkung 208 *Sei $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathcal{A}$. Genau dann gibt es einen $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus $Y \overset{y}{\Longrightarrow} Y'$ mit $fy = 0$, wenn $\mathrm{I}_f \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$.*

Beweis. Sei $(X \xrightarrow{f} Y \overset{y}{\Longrightarrow} Y') = (X \xrightarrow{0} Y')$ gegeben. Da y ein $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus ist, ist $\mathrm{K}_y \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Da $\dot{f}y = 0$, gibt es ein g mit $g\iota_y = \dot{f}$. Wegen Komposition ist g monomorph. Also ist auch $\mathrm{I}_f \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$.

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{K}_y \arrow[dr, "\iota_y", "\bullet"'] & & \\ X \arrow[r, "\vdash", "\bar{f}"'] & \mathrm{I}_f \arrow[u, "\bullet", "g"] \arrow[r, "\bullet", "\dot{f}"'] & Y \arrow[r, Rightarrow, "y"] & Y' \end{tikzcd}$$

Sei umgekehrt $\mathrm{I}_f \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Dann ist der Cokern $\rho_{\dot{f}}$ ein $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus, da er $\mathrm{I}_f \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$ als ein Kern und $0 \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$ als ein Cokern aufweist. Ferner ist $f\rho_{\dot{f}} = \bar{f}\dot{f}\rho_{\dot{f}} = 0$. ▫

Korollar 209 *Sei $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathcal{A}$. Genau dann gibt es einen $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus $Y \overset{y}{\Longrightarrow} Y'$ mit $fy = 0$, wenn es einen $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus $X' \overset{x}{\Longrightarrow} X$ mit $xf = 0$ gibt. Kurz,*

$$(\xrightarrow{f} \overset{\exists}{\Longrightarrow}) = (\xrightarrow{0}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\overset{\exists}{\Longrightarrow} \xrightarrow{f}) = (\xrightarrow{0}).$$

Beweis. Dies folgt aus Bemerkungen 208 und 208°. ▫

7.2.3 Die Quotientenkategorie $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$

Sei $\mathcal{N}$ eine dicke Teilkategorie der abelschen Kategorie $\mathcal{A}$.

Definition 210 Seien X, $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Sei $\mathrm{QMQ}(X,Y)$ die Menge ([3]) der Diagramme der Form

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[rr, "f"] \arrow[dl, Rightarrow, "t"'] & & Y' \arrow[dr, Leftarrow, "s"] & \\ X & & & & Y \end{tikzcd}$$

in $\mathcal{A}$, kurz (t,f,s) geschrieben. Wir definieren auf $\mathrm{QMQ}(X,Y)$ eine Relation $(\sim)$ wie folgt. Es sei $(t,f,s) \sim (\tilde{t},\tilde{f},\tilde{s})$, falls es ein kommutatives Diagramm folgender Form gibt.

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[rr, "f"] \arrow[dl, Rightarrow, "t"'] \arrow[dd, Rightarrow] & & Y' \arrow[dd, Rightarrow] \arrow[dr, Leftarrow, "s"] & \\ X & & \cdot \arrow[rr] & & Y \\ & \tilde{X}' \arrow[rr, "\tilde{f}"'] \arrow[ul, Leftarrow, "\tilde{t}"] & & \tilde{Y}' \arrow[uu, Rightarrow] \arrow[ur, Rightarrow, "\tilde{s}"'] & \end{tikzcd}$$

Bemerkung 211 *Seien* X, $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$.

Es ist $(\sim)$ *eine Äquivalenzrelation auf* $\mathrm{QMQ}(X,Y)$.

Beweis. Unter Verwendung von vier Identitäten erkennen wir, daß $(\sim)$ reflexiv ist. Nach Konstruktion ist $(\sim)$ symmetrisch.

Zum Nachweis der Transitivität sei $(t,f,s) \sim (\tilde{t},\tilde{f},\tilde{s}) \sim (\tilde{\tilde{t}},\tilde{\tilde{f}},\tilde{\tilde{s}})$ in $\mathrm{QMQ}(X,Y)$ gegeben. Wir konstruieren unter Verwendung von Bemerkungen 207 und 207° folgendes kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd} & & & & & & \\ & & & \cdot \arrow[rr, "f"] \arrow[dd, Rightarrow, "u_1"] & & \cdot \arrow[dd, Rightarrow, "v_1"'] & & \\ & & & & & & & \\ & & & \cdot \arrow[rr, "f_1"] \arrow[dd, Rightarrow, "u_2"] & & \cdot \arrow[dd, Rightarrow, "v_2"'] & & \\ X & & \cdot \arrow[ll, Rightarrow, "\tilde{t}"'] \arrow[rr, "\tilde{f}"] \arrow[uurr, Rightarrow, "u_5"] & & \cdot \arrow[ll, Rightarrow, "\tilde{s}"'] \arrow[dd, Rightarrow, "v_3"'] \arrow[uurr, Rightarrow, "v_5"'] & & Y \\ & & & \cdot \arrow[rr, "f_3"] \arrow[dd, Rightarrow, "u_3"] \arrow[dr, Rightarrow, "u_6"] & & \cdot \arrow[dd, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow, "v_6"'] & & \\ & & & & \cdot \arrow[rr, "f_2"] \arrow[dd, Rightarrow, "u_4"] & & \cdot \arrow[dd, Rightarrow, "v_4"'] & \\ & & & & & & & \\ & & & \cdot \arrow[rr, "\tilde{\tilde{f}}"'] & & \cdot & & \end{tikzcd}$$

Nach Konstruktion kommutieren die linken beiden Vierecke, die mittleren vier Rechtecke und die rechten beiden Vierecke. Ferner ist nach Konstruktion $u_5u_2 = u_6u_3$ und $v_2v_5 = v_3v_6$. Wir setzen $f_3 := u_5f_1v_5 = u_5u_2\tilde{f}v_2v_5 = u_6u_3\tilde{f}v_3v_6 = u_6f_2v_6$.

Es folgt $u_5u_1t = u_5u_2\tilde{t} = u_6u_3\tilde{t} = u_6u_4\tilde{\tilde{t}}$, $u_5u_1fv_1v_5 = u_5f_1v_5 = f_3 = u_6f_2v_6 = u_6u_4\tilde{\tilde{f}}v_4v_6$ und $sv_1v_5 = \tilde{s}v_2v_5 = \tilde{s}v_3v_6 = \tilde{\tilde{s}}v_4v_6$. Somit ist $(t, f, s) \sim (\tilde{\tilde{t}}, \tilde{\tilde{f}}, \tilde{\tilde{s}})$. ▫

Bemerkung 212 Seien $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Es ist $(\sim)$ als Äquivalenzrelation erzeugt ist von folgender Relation der *elementaren Äquivalenz*. Sei $(t, f, s) \in \mathrm{QMQ}(X, Y)$. Sei u ein $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus mit $\mathsf{Ziel}\, u = \mathsf{Start}\, t = \mathsf{Start}\, f$. Sei v ein $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus mit $\mathsf{Start}\, v = \mathsf{Ziel}\, s = \mathsf{Ziel}\, f$. Dann sei (t, f, s) elementar äquivalent zu (ut, uf, s) und zu (t, fv, sv).

Bemerkung 213 *Seien $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$.*

(1) *Jedes Element $(t, f, s) \in \mathrm{QMQ}(X, Y)$ ist äquivalent zu einem der Form (id_X, f', s').*

(2) *Zwei Elemente der Form (id_X, f, s), $(\mathrm{id}_X, \tilde{f}, \tilde{s}) \in \mathrm{QMQ}(X, Y)$ sind genau dann äquivalent, wenn es ein kommutatives Diagramm folgender Form gibt.*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\tilde{f}"'] & \arrow[d, Rightarrow] & Y \arrow[l, Rightarrow, "s"'] \arrow[dl, Rightarrow, "\tilde{s}"] \\
& \arrow[u, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

Die Identitäten in Elementen der Form $(\mathrm{id}_X, f, s) \in \mathrm{QMQ}(X, Y)$ werden in Diagrammen oft nicht dargestellt.

Beweis.

Zu (1). Bilde folgendes kommutative Diagramm; cf. Bemerkung 207°.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, Rightarrow, "t"'] \arrow[dr, Rightarrow, "t"] & & Y \arrow[dl, Rightarrow, "s'"] \arrow[dl, Rightarrow, "t'"'] \arrow[ll, Rightarrow, "s"'] \\
& \arrow[r, "f'"'] \arrow[ur, phantom, "\lrcorner"] & \arrow[ur, phantom, "\lrcorner"]
\end{tikzcd}$$

Es ist $(t, f, s) \sim (t, ft', st') = (t\,\mathrm{id}_X, tf', s') \sim (\mathrm{id}_X, f', s')$.

Zu (2). Nach Definition sind (id_X, f, s) und $(\mathrm{id}_X, \tilde{f}, \tilde{s})$ genau dann äquivalent, wenn es ein kommutatives Diagramm folgender Form gibt.

$$\begin{tikzcd}
 & \cdot \arrow[r, "f"] & \cdot & \\
X \arrow[ur, equal] \arrow[dr, equal] \arrow[r] \arrow[u, phantom, "\Uparrow u"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \tilde{u}"] & \cdot \arrow[d, "v"'] & \cdot \arrow[l, "s"'] & Y \arrow[ul, equal] \arrow[dl, equal] \\
 & \cdot \arrow[r, "\tilde{f}"'] & \cdot \arrow[u, phantom, "\tilde{v} \Uparrow"] & \\
 & & & \cdot \arrow[ul, equal, "\tilde{s}"]
\end{tikzcd}$$

Notwendigerweise ist darin $u = \tilde{u}$. Da $u(fv - \tilde{f}\tilde{v}) = 0$, gibt es einen $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus w mit $(fv - \tilde{f}\tilde{v})w = 0$; cf. Korollar 209. Also ist $f(vw) = \tilde{f}(\tilde{v}w)$ und $s(vw) = \tilde{s}(\tilde{v}w)$, wie verlangt. $\square$

Definition 214 Sei $\mathrm{Ob}(\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}) := \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$.

Seien X, Y, $Z \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Sei

$$_{\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}}(X, Y) \;:=\; \mathrm{QMQ}(X, Y)/(\sim)\ .$$

Die Äquivalenzklasse von $(t, f, s) \in \mathrm{QMQ}(X, Y)$ bezüglich $(\sim)$ werde $t\backslash f/s$ geschrieben und als *Doppelbruch* bezeichnet.

Für $(\mathrm{id}_X, f', s') \in \mathrm{QMQ}(X, Y)$ kürzen wir $\mathrm{id}_X\backslash f'/s' =: f'/s'$ ab und sprechen von einem *Rechtsbruch.*

Für $(t'', f'', \mathrm{id}_Y) \in \mathrm{QMQ}(X, Y)$ kürzen wir $t''\backslash f''/\mathrm{id}_Y =: t''\backslash f''$ ab und sprechen von einem *Linksbruch.*

Seien $(t, f, s) \in \mathrm{QMQ}(X, Y)$ und $(v, g, u) \in \mathrm{QMQ}(Y, Z)$ gegeben. Bilde ein kommutatives Diagramm wie folgt; cf. Bemerkungen 207 und 207°.

$$(*) \qquad \begin{tikzcd}
 & \cdot \arrow[r, "f"] & \cdot \arrow[r, "g'"] & \cdot & \\
X \arrow[ur, equal, "t"] & & Y \arrow[ul, equal, "s"'] & & Z \arrow[ull, equal, "w_2"'] \arrow[dl, equal, "u"] \\
 & \cdot \arrow[uur, equal, "w_1"] \arrow[r, "f'"'] & \cdot \arrow[u, equal, "v"] \arrow[r, "g"'] & \cdot &
\end{tikzcd}$$

Hierbei kann das linke Viereck ein Pullback sein, muß aber nicht. Ferner kann das rechte Viereck ein Pushout sein, muß aber nicht.

Wir wollen das Kompositum zu

$$(t\backslash f/s) \cdot (v\backslash g/u) \;:=\; w_1 t\backslash f' g/u \;=\; t\backslash f g'/u w_2 \;\in\; _{\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}}(X, Z)$$

setzen.

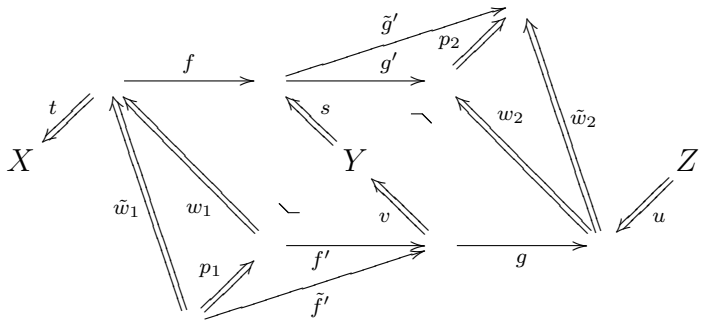
Lemma 215 *Die in Definition* 214 *gewünschte Kompositionsabbildung ist wohldefiniert und macht* $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$ *zu einer Kategorie, genannt die* Quotientenkategorie *von* $\mathcal{A}$ *nach* $\mathcal{N}$.

Beweis. Zunächst einmal merken wir an, daß in der Tat

$$w_1 t\backslash f'g/u \;=\; w_1 t\backslash f'gw_2/uw_2 \;=\; w_1 t\backslash w_1 fg'/uw_2 \;=\; t\backslash fg'/uw_2$$

ist.

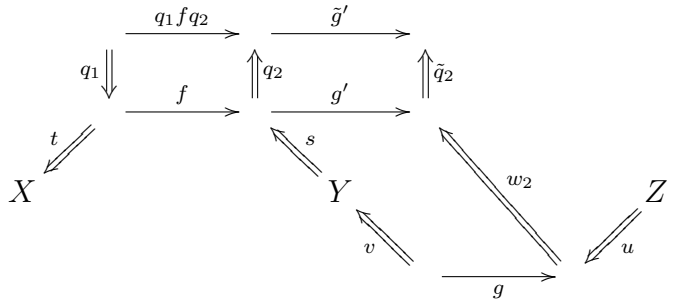
Wir haben, bei fester Repräsentantenwahl im ersten und im zweiten Faktor, die Unabhängigkeit von der Wahl der kommutativen Vierecke im Diagramm $(*)$ zu verifizieren. Dazu dürfen wir zum einen einen Pullback (f', f, w_1, vs) und einen Pushout (g, g', vs, w_2) wählen, und haben zum anderen zwei beliebige kommutative Vierecke $(\tilde{f}', f, \tilde{w}_1, vs)$ und $(g, \tilde{g}', vs, \tilde{w}_2)$ mit $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismen $\tilde{w}_1$ und $\tilde{w}_2$ vorzugeben. Wir erhalten folgendes kommutative Diagramm; cf. Bemerkung 206.



Daher ist $w_1 t\backslash f'g/u = p_1 w_1 t\backslash p_1 f'g/u = \tilde{w}_1 t\backslash \tilde{f}'g/u$. Oder dual.

Wir haben nun die Unabhängigkeit von der Repräsentantenwahl im ersten und im zweiten Faktor zu verifizieren. Wir zeigen diese im ersten Faktor, im zweiten Faktor gilt sie dann dank Dualität. Seien hierzu $(t, f, s) \in \mathrm{QMQ}(X, Y)$ und $(v, g, u) \in \mathrm{QMQ}(Y, Z)$ gegeben, sowie $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismen q_1 mit $\mathsf{Ziel}\, q_1 = \mathsf{Start}\, t = \mathsf{Start}\, f$ und q_2 mit $\mathsf{Start}\, q_2 = \mathsf{Ziel}\, f = \mathsf{Ziel}\, s$. Zu zeigen genügt, daß die Kompositionskonstruktion mit den Repräsentanten (t, f, s) und (v, g, u) dasselbe liefert wie mit den Repräsentanten $(q_1 t, q_1 f q_2, s q_2)$ und (v, g, u); cf. Bemerkung 212.

Wir konstruieren dazu folgendes kommutative Diagramm; cf. Bemerkung 207°.



Es resultiert, daß die Kompositionskonstruktion mit den Repräsentanten $(q_1 t, q_1 f q_2, s q_2)$ und (v, g, u) gerade

$$q_1 t\backslash q_1 f q_2 \tilde{g}'/uw_2\tilde{q}_2 \;=\; t\backslash f q_2 \tilde{g}'/uw_2\tilde{q}_2 \;=\; t\backslash fg'\tilde{q}_2/uw_2\tilde{q}_2 \;=\; t\backslash fg'/uw_2$$

liefert, was man auch von den Repräsentanten (t, f, s) und (v, g, u) erhält.

Somit ist die Wohldefiniertheit der Kompositionsabbildung aus Definition 214 nachgewiesen; cf. $(*)$.

Seien $(\mathrm{id}_X, f, s) \in \mathrm{QMQ}(X, Y)$ und $(\mathrm{id}_Y, g, u) \in \mathrm{QMQ}(Y, Z)$ gegeben. Für das Kompositum erstellen wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, equal] & & Y \arrow[ll, Rightarrow, "s"'] \arrow[r, "g'"] \arrow[dr, equal] & & Z \arrow[ll, Rightarrow, "w_2"'] \arrow[dl, Rightarrow, "u"] \\
& & & Y \arrow[r, "g"'] & Z
\end{tikzcd} ,$$

i.e. das kommutative Diagramm

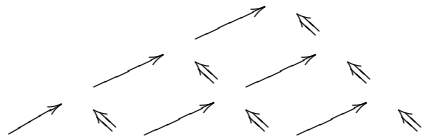
$$\begin{tikzcd}
& & & Z \\
& & Y \arrow[ur, "g"] & \\
X \arrow[ur, "f"] & & & \\
& & Y \arrow[uul, Rightarrow, "s"] \arrow[uur, "g'"] & & Z \arrow[uul, Rightarrow, "u"'] \arrow[uu, Rightarrow, "w_2"']
\end{tikzcd} ,$$

und erhalten

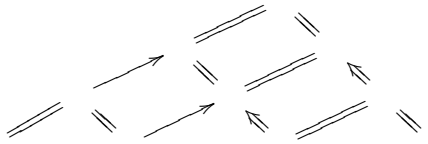
$$(f/s) \cdot (g/u) \;=\; fg'/uw_2 \;.$$

Um Identitäten und Assoziativität nachzuweisen, genügt es dank Bemerkung 213.(1), Rechtsbrüche zu betrachten.

Für die Assoziativität betrachten wir folgendes kommutative Diagramm; cf. Bemerkung 207°.



Für die Identitäten id/id betrachten wir folgendes kommutative Diagramm.



Damit ist nachgewiesen, daß $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$ mit der Komposition aus Definition 214 eine Kategorie ist; cf. $(*)$. □

Bemerkung 216 *Seien $t\backslash f$ und g/u komponierbar in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$. Es ist $(t\backslash f) \cdot (g/u) = t\backslash fg/u$.*

Speziell ist für einen Morphismus $y\backslash h/x$ in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$ dann $y\backslash h/x = (y\backslash\mathrm{id})(\mathrm{id}\backslash h/\mathrm{id})(\mathrm{id}/x)$.

Diese Bemerkung werden wir weitgehend kommentarlos verwenden.

Beweis. Um $t\backslash f$ und g/u zu komponieren, können wir in $(*)$ wegen $s = \mathrm{id}$ und $v = \mathrm{id}$ speziell $w_1 = \mathrm{id}$ und $w_2 = \mathrm{id}$ wählen. ▫

Definition 217 Wir haben einen Lokalisierungsfunktor

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{L = L_{\mathcal{A}/\!/\mathcal{N}}} & \mathcal{A}/\!/\mathcal{N} \\ f & \longmapsto & \mathrm{id}\backslash f/\mathrm{id}\ , \end{array}$$

welcher also Objekte identisch abbildet.

In der Tat ist für $\xrightarrow{f}\xrightarrow{g}$ in $\mathcal{A}$ auch $(\mathrm{id}\backslash f/\mathrm{id})(\mathrm{id}\backslash g/\mathrm{id}) = (\mathrm{id}\backslash f)(g/\mathrm{id}) = \mathrm{id}\backslash fg/\mathrm{id}$. Ferner ist $\mathrm{id}\backslash\mathrm{id}/\mathrm{id} = \mathrm{id}$.

Bemerkung 218 *Seien $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Sei $(t, f, s) \in \mathrm{QMQ}(X, Y)$. Es ist $t\backslash f/s$ genau dann ein Isomorphismus in $\mathcal{A}/\!/\mathcal{N}$, wenn f ein $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus ist.*

Ist f ein $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus, so ist $(Lf)^{-1} = f\backslash\mathrm{id} = \mathrm{id}/f$.

Beweis. Ist f ein $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus, dann ist $(f\backslash\mathrm{id})(Lf) = f\backslash f = \mathrm{id}\backslash\mathrm{id} = \mathrm{id} = \mathrm{id}/\mathrm{id} = f/f = (Lf)(\mathrm{id}/f)$. Also ist Lf ein Isomorphismus; cf. Aufgabe 32.(3, 5). Ferner folgt, daß $(Lf)^{-1} = f\backslash\mathrm{id} = \mathrm{id}/f$. Insbesondere ist auch $f\backslash\mathrm{id} = \mathrm{id}/f$ ein Isomorphismus.

Ist umgekehrt $t\backslash f/s$ ein Isomorphismus, dann auch $Lf = (t\backslash\mathrm{id})^{-1}(t\backslash f/s)(\mathrm{id}/s)^{-1}$.

Sei $(Lf)(g/u) = \mathrm{id}$, i.e. $fg/u = \mathrm{id}/\mathrm{id}$. Also gibt es einen $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus w mit $wfg = wu$. Somit ist fg ein $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus; cf. Bemerkung 206. Das Umfangssequenzlemma, Lemma 132, liefert $\mathrm{K}_f \rightarrowtail\!\!\!\!\bullet \mathrm{K}_{fg} \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$ und also $\mathrm{K}_f \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$ ([9]).

Dual ist auch $\mathrm{C}_f \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$.

Insgesamt ist f als $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus nachgewiesen. ▫

Lemma 219 *Die Quotientenkategorie $\mathcal{A}/\!/\mathcal{N}$ ist eine additive Kategorie. Es ist $0_{\mathcal{A}} = 0_{\mathcal{A}/\!/\mathcal{N}}$. Ferner ist für $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A} = \mathrm{Ob}(\mathcal{A}/\!/\mathcal{N})$ das Objekt $X \oplus Y$ sowohl die direkte Summe in $\mathcal{A}$ als auch in $\mathcal{A}/\!/\mathcal{N}$; Inklusions- und Projektionsmorphismen in $\mathcal{A}/\!/\mathcal{N}$ sind durch die Bilder der entsprechenden Morphismen in $\mathcal{A}$ unter L gegeben.*

Beweis. Es ist $0 = 0_{\mathcal{A}} =: 0_{\mathcal{A}/\!/\mathcal{N}}$ auch ein Nullobjekt in $\mathcal{A}/\!/\mathcal{N}$. Es ist initial, da für jeden $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus $Y \overset{s}{\Longrightarrow} Y'$ in $\mathcal{A}$ gilt, daß $0_{0,Y'}/s = 0_{0,Y}s/s = 0_{0,Y}/\mathrm{id}_Y$. Dual dazu ist es terminal.

Zu (Add 1). Seien $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}/\!/\mathcal{N}) = \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Wir wollen zeigen, daß die in $\mathcal{A}$ gebildete direkte Summe $X \oplus Y$, zusammen mit den Inklusionsmorphismen $\iota_1 := L\iota_1$ und $\iota_2 := L\iota_2$ und den Projektionsmorphismen $\pi_1 := L\pi_1$ und $\pi_2 := L\pi_2$ eine direkte Summe ist.

[9] Cf. auch Bemerkung 222 unten.

Dazu zu (Sum 1). Sei $S \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}) = \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Seien $S \xrightarrow{t\backslash f} X$ und $S \xrightarrow{v\backslash g} Y$ in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$ gegeben. Bilde mit Bemerkungen 207 und 206 das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, Rightarrow, "v'"] \arrow[d, Rightarrow, "t'"'] \arrow[dr, Rightarrow, "w"] & {} \arrow[d, Rightarrow, "t"] \\ {} \arrow[r, Rightarrow, "v"'] & S \end{tikzcd} .$$

Betrachte den Morphismus $S \xrightarrow{w\backslash(v'f\ \ t'g)} X \oplus Y$ in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$. Es wird

$$\begin{aligned} (w\backslash\,(v'f\ \ t'g))\pi_1 &= (w\backslash\,(v'f\ \ t'g))(\pi_1/\mathrm{id}_{X\oplus Y}) \\ &= w\backslash v'f/\mathrm{id}_{X\oplus Y} \\ &= v't\backslash v'f \\ &= t\backslash f\ . \end{aligned}$$

Genauso wird $(w\backslash\,(v'f\ \ t'g))\pi_2 = v\backslash g$.

Wir haben die Eindeutigkeit des Induzierten zu zeigen. Sei $S \xrightarrow{\tilde{w}\backslash(\tilde{f}\,\tilde{g})} X \oplus Y$ mit $\tilde{w}\backslash\tilde{f} = (\tilde{w}\backslash\,(\tilde{f}\,\tilde{g}))\pi_1 = t\backslash f = w\backslash v'f$ und $\tilde{w}\backslash\tilde{g} = (\tilde{w}\backslash\,(\tilde{f}\,\tilde{g}))\pi_2 = v\backslash g = w\backslash t'g$ gegeben. Wir wollen $\tilde{w}\backslash\,(\tilde{f}\,\tilde{g}) \overset{!}{=} w\backslash\,(v'f\ \ t'g)$ nachweisen.

Es gibt kommutative Diagramme wie folgt; cf. Bemerkung 213.(2°).

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\tilde{f}"] & X \arrow[l, Rightarrow, "\tilde{w}"'] \arrow[l, Rightarrow, bend left, "w"] \arrow[l, Rightarrow, bend right, "u_1"'] \arrow[l, Rightarrow, bend right, "u_2"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S \arrow[r, "\tilde{g}"] & Y \arrow[l, Rightarrow, "\tilde{w}"'] \arrow[l, Rightarrow, bend left, "w"] \arrow[l, Rightarrow, bend right, "u_3"'] \arrow[l, Rightarrow, bend right, "u_4"] \end{tikzcd}$$

Bilde folgenden Pullback; cf. Bemerkung 207.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, Rightarrow, "w'"] & {} \arrow[l, Rightarrow, "\tilde{w}"'] \arrow[l, Rightarrow, bend left, "w"] \arrow[l, Rightarrow, bend right, "\tilde{w}'"] \end{tikzcd}$$

Es gibt $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismen q_1 und q_3 mit $u_1 = q_1 w'$, $u_2 = q_1\tilde{w}'$, $u_3 = q_3 w'$ und $u_4 = q_3\tilde{w}'$. Bilde mit Bemerkungen 207 und 206 das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, Rightarrow, "q_3'"] \arrow[d, Rightarrow, "q_1'"'] \arrow[dr, Rightarrow, "p"] & {} \arrow[d, Rightarrow, "q_1"] \\ {} \arrow[r, Rightarrow, "q_3"'] & {} \end{tikzcd} .$$

Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & \\
S \arrow[rr, "\begin{pmatrix}\tilde f & \tilde g\end{pmatrix}"] & & X \oplus Y \\
 & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & & \\
S \arrow[rr, "\begin{pmatrix}v'f & t'g\end{pmatrix}"'] & & X \oplus Y \\
 & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & & \\
S \arrow[rr, "\begin{pmatrix}\tilde f & \tilde g\end{pmatrix}"] \arrow[d, Rightarrow, "pw'"] & & X \oplus Y \\
S \arrow[rr, "\begin{pmatrix}v'f & t'g\end{pmatrix}"'] \arrow[u, Rightarrow, "p\tilde w'"'] & & X \oplus Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
S \arrow[d, Rightarrow, "\tilde w"'] \\
S \arrow[u, Rightarrow, "w"]
\end{tikzcd}$$

kommutiert, da

$$\begin{aligned}
pw'\tilde f &= q_3' q_1 w' \tilde f \\
&= q_3' u_1 \tilde f \\
&= q_3' u_2 v' f \\
&= q_3' q_1 \tilde w' v' f \\
&= p\tilde w' v' f
\end{aligned}$$

und da genauso $pw'\tilde g = p\tilde w' t' g$.

Dazu zu (Sum 2). Dual zu (Sum 1).

Dazu zu (Sum 3). Es ist $\iota_1\pi_1 = (\mathrm{id}\backslash\iota_1)(\pi_1/\mathrm{id}) = \mathrm{id}\backslash\mathrm{id}/\mathrm{id} = \mathrm{id}$. Es ist $\iota_1\pi_2 = (\mathrm{id}\backslash\iota_1)(\pi_2/\mathrm{id}) = \mathrm{id}\backslash 0_{X,Y}/\mathrm{id} = L0_{X,Y} = (L0_{X,0})(L0_{0,X}) = 0$. Etc.

Zu (Add 2). Sei $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}) = \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Da (Add 2) in $\mathcal{A}$ gilt, und da ein Funktor gemäß Bemerkung 84 Isomorphismen respektiert, genügt es zu zeigen, daß $L\left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)$. In der Tat ist $\iota_1(L\left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right))\pi_1 = (L\iota_1)(L\left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right))(L\pi_1) = L(\iota_1\left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)\pi_1) = L1 = 1$, ferner $\iota_1(L\left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right))\pi_2 = (L\iota_1)(L\left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right))(L\pi_2) = L(\iota_1\left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)\pi_2) = L0 = 0$, etc. ▫

Bemerkung 220 *Der Lokalisierungsfunktor* $\mathcal{A} \xrightarrow{L} \mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$ *ist additiv.*

Beweis. Es ist $L0 = 0$. Seien ferner $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ gegeben. Betrachte die direkte Summe $X \oplus Y$ in $\mathcal{A}$. Es ist $L\pi_1 = \pi_1$ und $L\pi_2 = \pi_2$; cf. Beweis zu (Sum 1) in Lemma 219. Insbesondere ist $\left(\begin{smallmatrix}L\pi_1 & L\pi_2\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}\pi_1 & \pi_2\end{smallmatrix}\right) = \mathrm{id}_{LX\oplus LY}$ ein Iso-, also auch ein Monomorphismus. Gemäß Definition 110 ist L somit additiv; cf. Bemerkung 109.(3). ▫

Bemerkung 221 *Seien* $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. *Sei* $(t, f, s) \in \mathrm{QMQ}(X, Y)$. *Die folgenden Aussagen* $(1, 2, 2^\circ)$ *sind äquivalent.*

(1) *Es ist* $t\backslash f/s = 0$.

(2) *Es gibt einen* $\mathcal{N}$*-Quasiisomorphismus* w_1 *mit* $w_1 f = 0$.

(2°) *Es gibt einen* $\mathcal{N}$*-Quasiisomorphismus* w_2 *mit* $f w_2 = 0$.

Beweis.

(1) $\Rightarrow$ (2). Da $t\backslash f/s = 0 = (\mathrm{id}_X\backslash 0_{X,0})(0_{0,Y}/\mathrm{id}_Y) = \mathrm{id}_X\backslash 0_{X,Y}/\mathrm{id}_Y$, haben wir ein kommutatives Diagramm in $\mathcal{A}$ wie folgt.

$$\begin{tikzcd}
 & & \\
X \arrow[uur, "v"'] \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow"] & & Y \arrow[ull, "s"] \arrow[dl, equal] \arrow[dl, phantom, "\Uparrow"] \\
 & & \\
 & & \arrow[uul, phantom, "\Uparrow u_1"] \arrow[uur, phantom, "u_2 \Downarrow"]
\end{tikzcd}$$

Insbesondere ist $(u_1 f)u_2 = 0$. Folglich gibt es einen $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus u_3 mit $u_3(u_1 f) = 0$; cf. Korollar 209. Setze $w_1 := u_3 u_1$; cf. Bemerkung 206. Es ist $w_1 f = 0$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Es ist $t\backslash f/s = w_1 t\backslash w_1 f/s = w_1 t\backslash 0/s = (w_1 t\backslash 0_{\mathsf{Start}\, w_1,0})(0_{0,\,\mathsf{Ziel}\, s}/s) = 0$. ▫

Bemerkung 222 *Sei $f/s \in \mathrm{Mor}(\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N})$. Es ist f/s genau dann monomorph, wenn der Kern K_f, genommen in $\mathcal{A}$, in $\mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$ liegt.*

Beweis. Sei zum einen f/s monomorph. Es ist $(\mathrm{id}\backslash\iota_f)(f/s) = 0$. Da f/s monomorph ist, folgt $\mathrm{id}\backslash\iota_f = 0$, i.e. $u\,\iota_f = 0$ in $\mathcal{A}$ für einen $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus u; cf. Bemerkung 221.(1, 2). Da ι_f in $\mathcal{A}$ monomorph ist, folgt $u = 0$. Also ist $\mathrm{K}_f = \mathsf{Start}\,\iota_f = \mathsf{Ziel}\,u = \mathrm{C}_u \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$.

Sei zum anderen $\mathrm{K}_f \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$. Sei $v\backslash g$ in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$ mit $(v\backslash g)(f/s) = 0$ gegeben. Wir müssen $v\backslash g \overset{!}{=} 0$ zeigen. Da $v\backslash gf/s = 0$, gibt es einen $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus w mit $wgf = 0$; cf. Bemerkung 221.(1, 2). Also gibt es ein a in $\mathcal{A}$ mit $wg = a\,\iota_f$. Folglich ist $v\backslash g = wv\backslash wg = wv\backslash a\,\iota_f = (wv\backslash a)(\iota_f/\,\mathrm{id})$, so daß es genügt, $\iota_f/\mathrm{id} \overset{!}{=} 0$ zu zeigen. Da aber $\mathrm{K}_f \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$, ist $0_{0,\mathrm{K}_f}$ ein $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus. Da $0_{0,\mathrm{K}_f}\,\iota_f = 0$, ist $\iota_f/\mathrm{id} = 0$; cf. Bemerkung 221.(1, 2). ▫

Lemma 223 *Die Quotientenkategorie $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$ ist eine abelsche Kategorie. Ist $f \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{A}$, dann ist $L\iota_f$ ein Kern und $L\rho_f$ ein Cokern von Lf in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$.*

Die übrigen Kerne von Morphismen in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$ ergeben sich dann durch isomorphe Ersetzung; cf. Aufgabe 51.(1), Bemerkung 222.

Beweis. Dank Lemma 219 ist $\mathcal{A}$ additiv.

Zu (Ab 1). Sei $f/s : X \longrightarrow Y$ in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$ gegeben. Wir wollen zeigen, daß $\mathrm{id}\backslash\iota_f$ ein Kern von f/s in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$ ist.

Zum einen ist $(\mathrm{id}\backslash\iota_f)(f/s) = \mathrm{id}\backslash\iota_f f/s = 0$.

Sei zum anderen $v\backslash g$ in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$ mit $(v\backslash g)(f/s) = 0$ gegeben. Da $\mathrm{id}\backslash\iota_f$ nach Bemerkung 222 ein Monomorphismus ist, genügt es, eine Faktorisierung von $v\backslash g$ über $\mathrm{id}\backslash\iota_f$ zu finden.

Da $v\backslash gf/s = 0$, gibt es einen $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus w mit $wgf = 0$; cf. Bemerkung 221.(1, 2). Also gibt es ein a in $\operatorname{Mor}\mathcal{A}$ mit $wg = a\,\iota_f$. Es folgt $v\backslash g = wv\backslash wg = wv\backslash a\,\iota_f = (wv\backslash a)(\iota_f/\mathrm{id}) = (wv\backslash a)(\mathrm{id}\backslash\iota_f)$.

Zu (Ab 1°). Dual zu (Ab 1).

Zu (Ab 2). Sei $t\backslash f$ ein Monomorphismus in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$. Wir wollen zeigen, daß $t\backslash f$ ein Kern von $L\rho_f$ ist.

Es ist $t\backslash f = (Lt)^{-1}(Lf)$; cf. Bemerkung 218. Somit genügt es zu zeigen, daß der Monomorphismus Lf ein Kern von $L\rho_f$ ist; cf. Bemerkung 119.(5).

Zum einen ist $(Lf)(L\rho_f) = L(f\rho_f) = L0 = 0$.

Sei zum anderen $v\backslash g$ in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$ mit $(v\backslash g)(L\rho_f) = 0$ gegeben. Da Lf monomorph ist, genügt es, eine Faktorisierung von $v\backslash g$ über Lf zu finden. Da $v\backslash g\rho_f/\mathrm{id} = 0$, gibt es einen $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus w mit $wg\rho_f = 0$; cf. Bemerkung 221.(1, 2). Somit gibt es ein $a \in \operatorname{Mor}\mathcal{A}$ mit $wg = a\dot{f}$; cf. Bemerkung 124.(1). Mit Bemerkung 222 ist $\mathrm{K}_{\bar{f}} = \mathrm{K}_f \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Also ist $\bar{f}$ ein $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus. Es ist $(L\bar{f})^{-1} = \mathrm{id}/\bar{f}$; cf. Bemerkung 218. Somit wird

$$\begin{aligned} v\backslash g &= wv\backslash wg \\ &= wv\backslash a\dot{f} \\ &= (wv\backslash a)(L\dot{f}) \\ &= (wv\backslash a)(\mathrm{id}/\bar{f})(L\bar{f})(L\dot{f}) \\ &= (wv\backslash a/\bar{f})(Lf)\ . \end{aligned}$$

Zu (Ab 2°). Dual zu (Ab 2). □

Bemerkung 224 *Der Lokalisierungsfunktor* $\mathcal{A} \xrightarrow{L} \mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$ *ist exakt. Es ist* $LN \simeq 0$ *für* $N \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$.

Beweis. Dank Bemerkung 220 ist L additiv.

Sei $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} X''$ eine kurz exakte Sequenz in $\mathcal{A}$. Wir haben zu zeigen, daß $LX' \xrightarrow{Li} LX \xrightarrow{Lr} LX$ kurz exakt ist; cf. Definition 128.(1).

Es gibt einen Isomorphismus f mit $i = f\,\iota_r$, da sowohl i als auch ι_r Kerne von r sind; cf. Bemerkung 119.(2). Also ist $Li = (Lf)(L\iota_r)$. Nach Lemma 223 ist $L\iota_r$ ein Kern von Lr. Es ist Lf ein Isomorphismus; cf. Bemerkung 84.(3). Somit ist auch Li ein Kern von Lr; cf. Bemerkung 119.(5).

Dual ist Lr ein Cokern von Li.

Somit ist (Li, Lr) kurz exakt.

Ist ferner $N \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$, so ist $0 \longrightarrow N$ ein $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus. Also ist $L(0 \longrightarrow N) = 0 \longrightarrow LN$ ein Isomorphismus; cf. Bemerkung 218. □

Lemma 225 (Universelle Eigenschaft Quotientenkategorie)

Sei $\mathcal{B}$ eine weitere abelsche Kategorie.

(1) *Sei $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ ein exakter Funktor so, daß $FN \simeq 0$ für alle $N \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Dann gibt es genau einen exakten Funktor $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N} \xrightarrow{\bar{\bar{F}}} \mathcal{B}$ mit $\bar{\bar{F}} \circ L = F$.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "L"'] & \mathcal{B} \\ \mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N} \arrow[ur, "\bar{\bar{F}}"'] & \end{tikzcd}$$

Hierbei ist $\bar{\bar{F}}(t\backslash f/s) = (Ft)^{-1}(Ff)(Fs)^{-1}$ für $t\backslash f/s \in \operatorname{Mor}\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$.

(2) *Seien $\mathcal{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}} \mathcal{B}$ exakte Funktoren so, daß $FN \simeq 0$ und $GN \simeq 0$ für alle $N \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Sei $F \xrightarrow{a} G$ eine Transformation. Dann gibt es genau eine Transformation $\bar{\bar{F}} \xrightarrow{\bar{\bar{a}}} \bar{\bar{G}}$ so, daß $\bar{\bar{a}}X = \bar{\bar{a}}LX = aX$ für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "a\Downarrow"] \arrow[d, "L"'] & \mathcal{B} \\ \mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N} \arrow[ur, bend left, "\bar{\bar{F}}"] \arrow[ur, bend right, "\bar{\bar{G}}"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\bar{\bar{a}}"] & \end{tikzcd}$$

Beweis.

Zu (1).

Zur Eindeutigkeit. Sei $t\backslash f/s$ ein Morphismus in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$. Es ist $t\backslash f/s = (t\backslash \mathrm{id})(Lf)(\mathrm{id}/s) = (Lt)^{-1}(Lf)(Ls)^{-1}$; cf. Bemerkungen 216 und 218. Ist $F' : \mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{B}$ ein Funktor mit $F' \circ L = F$, so ist folglich $F'(t\backslash f/s) = F'((Lt)^{-1}(Lf)(Ls)^{-1}) = (F'Lt)^{-1}(F'Lf)(F'Ls)^{-1} = (Ft)^{-1}(Ff)(Fs)^{-1}$. Dadurch ist F' festgelegt.

Zur Existenz. Setze $\bar{\bar{F}}X := FX$ für $X \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}) = \operatorname{Ob}\mathcal{A}$.

Da F exakt ist, und da $FN \simeq 0$ für alle $N \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$, werden $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismen unter F auf Isomorphismen abgebildet. Denn ist f ein $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus, dann sind $(\iota_f, \bar{f})$ und $(\dot{f}, \rho_f)$ kurz exakt. Wegen F exakt sind folglich auch $(F\iota_f, F\bar{f})$ und $(F\dot{f}, F\rho_f)$ kurz exakt. Da f ein $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus ist, liegt $\mathrm{K}_f \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Nach Voraussetzung ist $F\mathrm{K}_f \simeq 0$. Also ist $F\bar{f}$ ein Isomorphismus; cf. Bemerkung 119.(3, 5), Aufgabe 47.(2). Dual ist $F\dot{f}$ ein Isomorphismus. Ingesamt ist also $Ff = (F\bar{f})(F\dot{f})$ ein Isomorphismus. Cf. Definition 203, Bemerkung 124.(1).

Setze $\bar{\bar{F}}(t\backslash f/s) := (Ft)^{-1}(Ff)(Fs)^{-1}$ für $t\backslash f/s \in \operatorname{Mor}\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$.

Dies ist wohldefiniert, denn ist u ein $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus mit $\mathsf{Ziel}\, u = \mathsf{Start}\, t = \mathsf{Start}\, f$, dann ist

$$(F(ut))^{-1}(F(uf))(Fs)^{-1} \;=\; (Ft)^{-1}(Fu)^{-1}(Fu)(Ff)(Fs)^{-1} \;=\; (Ft)^{-1}(Ff)(Fs)^{-1}\,.$$

Dual für den anderen Fall der elementaren Äquivalenz. Cf. Bemerkung 212.

Es ist $\bar{\bar{F}}\,\mathrm{id} = \bar{\bar{F}}(\mathrm{id}\backslash\mathrm{id}/\mathrm{id}) = (F\,\mathrm{id})^{-1}(F\,\mathrm{id})(F\,\mathrm{id})^{-1} = \mathrm{id}$.

Was die Verträglichkeit von $\bar{\bar{F}}$ mit Komposition anbelangt, betrachten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & \cdot \arrow[r, "f"] & \cdot \arrow[r, "g'"] & \cdot \arrow[dl, Rightarrow, "w_2"] & \\
 & & \cdot \arrow[ul, Rightarrow, "s"'] & & \cdot \arrow[ul, Rightarrow, "u"] \\
\cdot \arrow[uur, Rightarrow, "t"] & & & \cdot \arrow[ul, Rightarrow, "v"] \arrow[r, "g"'] & \cdot
\end{tikzcd}$$

in $\mathcal{A}$ wie in $(*)$. Es wird

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{F}}\big((t\backslash f/s)(v\backslash g/u)\big) &= \bar{\bar{F}}(t\backslash fg'/uw_2) \\
&= (Ft)^{-1}(F(fg'))(F(uw_2))^{-1} \\
&= (Ft)^{-1}(Ff)(Fg')(Fw_2)^{-1}(Fu)^{-1} \\
&= (Ft)^{-1}(Ff)(Fs)^{-1}(Fv)^{-1}(F(vs))(Fg')(Fw_2)^{-1}(Fu)^{-1} \\
&= (Ft)^{-1}(Ff)(Fs)^{-1}(Fv)^{-1}(Fg)(Fw_2)(Fw_2)^{-1}(Fu)^{-1} \\
&= \big((Ft)^{-1}(Ff)(Fs)^{-1}\big)\big((Fv)^{-1}(Fg)(Fu)^{-1}\big) \\
&= \big(\bar{\bar{F}}(t\backslash f/s)\big)\big(\bar{\bar{F}}(v\backslash g/u)\big)\,.
\end{aligned}$$

Schließlich ist $\bar{\bar{F}}Lf = \bar{\bar{F}}(\mathrm{id}\backslash f/\mathrm{id}) = (F\,\mathrm{id})^{-1}(Ff)(F\,\mathrm{id})^{-1} = Ff$ für $f \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{A}$, also $\bar{\bar{F}} \circ L = F$.

Zur Additivität. Es ist $\bar{\bar{F}}0_{\mathcal{A}/\mathcal{N}} = \bar{\bar{F}}L0_{\mathcal{A}} = F0_{\mathcal{A}} \simeq 0_{\mathcal{B}}$.

Seien ferner $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}) = \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ gegeben. Wir betrachten $X \oplus Y$ und haben zu zeigen, daß $(\bar{\bar{F}}\pi_1\ \bar{\bar{F}}\pi_2)$ monomorph ist; cf. Definition 110.

Nun ist aber $X \oplus Y$ in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$ durch die in $\mathcal{A}$ gebildete direkte Summe gegeben, und es ist auch $\pi_1 = L\pi_1$ und $\pi_2 = L\pi_2$; cf. Lemma 219. Es folgt $(\bar{\bar{F}}\pi_1\ \bar{\bar{F}}\pi_2) = (\bar{\bar{F}}L\pi_1\ \bar{\bar{F}}L\pi_2) = (F\pi_1\ F\pi_2)$, und dies ist ein Isomorphismus, also insbesondere ein Monomorphismus, da F additiv ist; cf. loc. cit.

Zur Exaktheit. Sei $(t\backslash f, g/u)$ eine kurz exakte Sequenz. Wir haben zu zeigen, daß $\big(\bar{\bar{F}}(t\backslash f), \bar{\bar{F}}(g/u)\big)$ eine kurz exakte Sequenz ist.

Da $t\backslash f = (Lt)^{-1}(Lf)$ und $g/u = (Lg)(Lu)^{-1}$ nach Bemerkungen 216 und 218, ist auch (Lf, Lg) eine kurz exakte Sequenz; cf. Bemerkung 119.(5, 6).

Es ist $\big(\bar{\bar{F}}(t\backslash f), \bar{\bar{F}}(g/u)\big) = \big((Ft)^{-1}(Ff), (Fg)(Fu)^{-1}\big)$ kurz exakt genau dann, wenn (Ff, Fg) kurz exakt ist; cf. loc. cit. Es genügt also, letzteres zu zeigen.

Zeigen wir, daß Ff ein Kern von Fg ist. Bilde ι_g in $\mathcal{A}$. Es ist $L\iota_g$ wie Lf ein Kern von Lg; cf. Lemma 223. Also gibt es einen Isomorphismus $x\backslash y$ in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$ mit $Lf = (x\backslash y)(L\iota_g)$;

cf. Bemerkung 119.(2). Es sind $(\iota_g\,,\,\bar{g})$ und $(\dot{g},\rho_g)$ kurz exakt, und also auch $(F\iota_g\,,\,F\bar{g})$ und $(F\dot{g},F\rho_g)$. Insbesondere ist $F\dot{g}$ monomorph, und somit $F\iota_g$ ein Kern von $Fg = (F\bar{g})(F\dot{g})$; cf. Bemerkung 119.(6). Nun ist $Ff = \bar{\bar{F}}Lf = \bar{\bar{F}}\big((x\backslash y)(L\iota_g)\big) = (\bar{\bar{F}}(x\backslash y))(F\iota_g)$. Da $\bar{\bar{F}}(x\backslash y)$ wie $x\backslash y$ ein Isomorphismus ist, folgt, daß auch Ff ein Kern von Fg ist; cf. Bemerkung 119.(5).

Dual ist Fg ein Cokern von Ff.

Somit ist (Ff,Fg) kurz exakt.

Zu (2).

Zur Eindeutigkeit. Es operiert L identisch, damit insbesondere surjektiv, auf den Objekten. Ist $a'LX = aX$ für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ verlangt, so legt dies also a' fest.

Zur Existenz. Setze $\bar{\bar{a}}X := aX$ für $X \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}) = \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Können wir zeigen, daß das Tupel $(\bar{\bar{a}}X)_{X\in\operatorname{Ob}(\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N})}$ natürlich ist, so haben wir eine Transformation $\bar{\bar{a}}$ wie verlangt gefunden.

In der Tat wird für einen Morphismus $t\backslash f/s$ in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$ von X nach Y, setzen wir $X' := \mathsf{Start}\,t$ und $Y' := \mathsf{Ziel}\,s$,

$$\begin{aligned}
(\bar{\bar{a}}X)(\bar{\bar{G}}(t\backslash f/s)) &= (aX)(Gt)^{-1}(Gf)(Gs)^{-1}\\
&= (Ft)^{-1}(Ft)(aX)(Gt)^{-1}(Gf)(Gs)^{-1}\\
&= (Ft)^{-1}(aX')(Gt)(Gt)^{-1}(Gf)(Gs)^{-1}\\
&= (Ft)^{-1}(aX')(Gf)(Gs)^{-1}\\
&= (Ft)^{-1}(Ff)(aY')(Gs)^{-1}\\
&= (Ft)^{-1}(Ff)(Fs)^{-1}(Fs)(aY')(Gs)^{-1}\\
&= (Ft)^{-1}(Ff)(Fs)^{-1}(aY)(Gs)(Gs)^{-1}\\
&= (Ft)^{-1}(Ff)(Fs)^{-1}(aY)\\
&= (\bar{\bar{F}}(t\backslash f/s))(\bar{\bar{a}}Y)\ .
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
 & FX' \arrow[r, "Ff"] \arrow[dl, "Ft", "\wr"'] \arrow[dd, "aX'"] & FY' \arrow[dd, "aY'"] & \\
FX \arrow[dd, "aX"'] & & & FY \arrow[ul, "Fs"', "\wr"] \arrow[dd, "aY"] \\
 & GX' \arrow[r, "Gf"] \arrow[dl, "Gt", "\wr"'] & GY' & \\
GX & & & GY \arrow[ul, "Gs"', "\wr"]
\end{tikzcd}$$

□

Cf. auch Aufgabe 75.

Bemerkung 226 *Jede kurz exakte Sequenz in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$ ist isomorph zum Bild einer kurz exakten Sequenz in $\mathcal{A}$ unter L.*

Dies hätte auch zum Beweis der Exaktheit von $\bar{\bar{F}}$ für Lemma 225 herangezogen werden können. Denn das Bild einer kurz exakten Sequenz in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$ unter $\bar{\bar{F}}$ ist genau dann kurz exakt, wenn das Bild einer zu ihr isomorphen Sequenz kurz exakt ist; cf. Aufgabe 51.(1). Ist aber letztere im Bild unter L, so ist ihr Bild unter $\bar{\bar{F}}$ das Bild einer kurz exakten Sequenz unter $\bar{\bar{F}} \circ L = F$, und somit seinerseits kurz exakt.

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß jeder Monomorphismus in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$ isomorph zum Bild eines Monomorphismus in $\mathcal{A}$ unter L ist. Denn wegen dieser Isomorphie (oder wegen L exakt) ist ein solches Bild dann wieder ein Monomorphismus. Die Ergänzungen dieser beiden Monomorphismen zu kurz exakten Sequenzen in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$ sind daher dann möglich und zueinander isomorph; cf. Bemerkung 124.(2), Lemma 136 (oder mehrfach erstere Bemerkung). Und als Ergänzung zu einer kurz exakten Sequenz eines Monomorphismus im Bild von L kann man das Bild einer solchen Ergänzung unter L verwenden, da L exakt ist.

Sei also f/s ein Monomorphismus in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$. Nach Bemerkung 222 ist $\mathrm{K}_f \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Also ist $\bar{f}$ ein $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus. Da $f/s = (L\bar{f})(L\dot{f})(Ls)^{-1}$, ist f/s in der Tat isomorph zu $L\dot{f}$; cf. Bemerkung 218. ▫

Beispiel 227 Da $LN \simeq 0$ für $N \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$, haben wir folgendes kommutatives Dreieck von Funktoren; cf. Bemerkungen 224 und 116.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "L"] \arrow[d, "R"'] & \mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N} \\ \mathcal{A}/\mathcal{N} \arrow[ur, "\bar{L}"'] & \end{tikzcd}$$

Wir wollen skizzieren, daß $\bar{L}$ im allgemeinen keine Äquivalenz ist.

1. Sei $\mathcal{N} := \mathbf{Z}\text{-fin} \subseteq \mathbf{Z}\text{-mod} =: \mathcal{A}$; cf. Beispiel 204.(4, 5). Sei $\mathbf{Z}$-lat $\subseteq$ $\mathbf{Z}$-mod die volle Teilkategorie der $\mathbf{Z}$-Moduln isomorph zu $\mathbf{Z}^{\oplus m}$ für ein $m \geqslant 0$ (engl. lattices, dt. Gitter). Sei $\mathbf{Q}$-mod die Kategorie der endlichdimensionalen $\mathbf{Q}$-Vektorräume.

2. Wir *behaupten,* daß das Kompositum $\mathbf{Z}\text{-lat} \hookrightarrow \mathbf{Z}\text{-mod} \xrightarrow{R} \mathbf{Z}\text{-mod}/\mathbf{Z}\text{-fin}$ eine Äquivalenz ist.

Dicht. Jedes Objekt in $\mathbf{Z}$-mod ist isomorph zu einem der Form $\mathbf{Z}^{\oplus m} \oplus A$ mit $m \geqslant 0$ und $A \in \operatorname{Ob}\mathbf{Z}\text{-fin}$; cf. Aufgabe 16. Nun ist $\mathbf{Z}^{\oplus m} \oplus A \simeq \mathbf{Z}^{\oplus m} \oplus 0 \simeq \mathbf{Z}^{\oplus m}$ in $\mathbf{Z}$-mod/$\mathbf{Z}$-fin, und dieses Objekt liegt im Bild von $\mathbf{Z}$-lat unter R.

Voll. Das Kompositum zweier voller Funktoren ist voll.

Treu. Es genügt zu zeigen, daß kein Morphismus der Form $X \longrightarrow Y$ ungleich 0 in $\mathbf{Z}$-lat auf den Nullmorphismus in $\mathbf{Z}$-mod/$\mathbf{Z}$-fin abgebildet wird. Wäre sein Bild gleich 0, so würde $(X \longrightarrow Y) = (X \longrightarrow A \longrightarrow Y)$ faktorisieren für ein $A \in \operatorname{Ob}\mathbf{Z}\text{-fin}$. Nun ist aber ${}_{\mathbf{Z}}(A, Y) = 0$, da für $A \xrightarrow{f} Y$ und $a \in A$ stets $|A|a = 0$ gilt, somit auch $|A|(a)f = (|A|a)f = 0$, und also, wegen $Y \in \operatorname{Ob}\mathbf{Z}\text{-lat}$, auch $(a)f = 0$; cf. Aufgabe 16.

Dies zeigt die *Behauptung.*

3. Schreibe $F : \mathbf{Z}\text{-mod} \longrightarrow \mathbf{Q}\text{-mod}$ für die Einschränkung von $\mathbf{Q} \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} - : \mathbf{Z}\text{-Mod} \longrightarrow \mathbf{Q}\text{-Mod}$. Beachte, wenn $X = {}_{\mathbf{Z}}\langle x_1 , \ldots , x_n\rangle$, dann $\mathbf{Q} \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} X = {}_{\mathbf{Z}}\langle 1 \otimes x_1 , \ldots , 1 \otimes x_n\rangle$.

Es ist $FA \simeq 0$ für $A \in \operatorname{Ob} \mathbf{Z}\text{-fin}$. Denn $\frac{1}{z} \otimes a = \frac{1}{|A|z} \otimes |A|a = 0$ für $z \in \mathbf{Z} \smallsetminus \{0\}$ und $a \in A$.

Sei ein Morphismus $X' \xrightarrow{f} X$ in $\mathbf{Z}$-mod gegeben. Ohne Einschränkung ist $X' = \mathbf{Z}^{\oplus m'} \oplus A'$ und $X = \mathbf{Z}^{\oplus m} \oplus A$ mit $m', m \geqslant 0$ und $A', A \in \operatorname{Ob} \mathbf{Z}\text{-fin}$; cf. Aufgabe 16. Dann ist f von der Form

$$\mathbf{Z}^{\oplus m'} \oplus A' \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} M & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}^{\oplus m} \oplus A$$

mit $M \in \mathbf{Z}^{m' \times m}$. Nun ist Ff isomorph zu

$$\mathbf{Q}^{\oplus m'} \xrightarrow{M} \mathbf{Q}^{\oplus m'} ,$$

da $FA' \simeq 0$ und $FA \simeq 0$; cf. Bemerkung 112.

Ist nun $f = \left(\begin{smallmatrix} M & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)$ monomorph, so auch $\mathbf{Z}^{\oplus m'} \xrightarrow{M} \mathbf{Z}^{\oplus m}$ und somit auch $\mathbf{Q}^{\oplus m'} \xrightarrow{M} \mathbf{Q}^{\oplus m}$. Also ist F exakt.

Somit existiert $\bar{\bar{F}} : \mathbf{Z}\text{-mod}/\!\!/\mathbf{Z}\text{-fin} \longrightarrow \mathbf{Q}\text{-mod}$; cf. Lemma 225. Wir *behaupten,* daß $\bar{\bar{F}}$ eine Äquivalenz ist.

Dicht. Für $m \geqslant 0$ ist $\mathbf{Q}^{\oplus m}$ isomorph zum Bild von $\mathbf{Z}^{\oplus m}$ unter $\bar{\bar{F}}$.

Voll. Seien o.E. $\mathbf{Z}^{\oplus m'} \oplus A'$ und $\mathbf{Z}^{\oplus m} \oplus A$ in $\operatorname{Ob}(\mathbf{Z}\text{-mod}/\!\!/\mathbf{Z}\text{-fin}) = \operatorname{Ob} \mathbf{Z}\text{-mod}$ mit $m', m \geqslant 0$ und $A', A \in \operatorname{Ob} \mathbf{Z}\text{-fin}$ gegeben. Sei ferner ein Morphismus $\mathbf{Q}^{\oplus m'} \xrightarrow{M} \mathbf{Q}^{\oplus m}$ mit $M \in \mathbf{Q}^{m' \times m}$ vorgegeben. Wir haben einen Morphismus von $\mathbf{Z}^{\oplus m'} \oplus A'$ nach $\mathbf{Z}^{\oplus m} \oplus A$ in $\mathbf{Z}\text{-mod}/\!\!/\mathbf{Z}\text{-fin}$ zu finden, der bis auf fest gewählte isomorphe Ersetzung auf M abgebildet wird.

Sei $M = \frac{1}{z}\hat{M}$ für ein geeignetes $z \in \mathbf{Z} \smallsetminus \{0\}$ und ein entsprechendes $\hat{M} \in \mathbf{Z}^{m \times m'}$. Sei $Z := \begin{pmatrix} z & & \\ & \ddots & \\ & & z \end{pmatrix} \in \mathbf{Z}^{m' \times m'}$. Es ist $\left(\begin{smallmatrix} Z & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) : \mathbf{Z}^{\oplus m'} \oplus A' \longrightarrow \mathbf{Z}^{\oplus m'} \oplus A'$ ein $\mathbf{Z}$-fin-Quasiisomorphismus, da sowohl sein Kern A' als auch sein Cokern $(\mathbf{Z}/z)^{\oplus m'} \oplus A'$ endlich ist; cf. Aufgabe 15. Somit können wir ein Urbild wie gesucht mit $\left(\begin{smallmatrix} Z & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \setminus \left(\begin{smallmatrix} \hat{M} & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ angeben.

Treu. In obigen Bezeichnungen wird ein Morphismus $\left(\begin{smallmatrix} M' & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right) \setminus \left(\begin{smallmatrix} M & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)$, mit $M' \in \mathbf{Z}^{m' \times m'}$ von Rang m' und $M \in \mathbf{Z}^{m' \times m}$, unter F nach $M'^{-1}M$ abgebildet. Letzterer veschwindet genau dann, wenn $M = 0$. Dann aber ist $\left(\begin{smallmatrix} M' & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = 0$. Dies zeigt $\left(\begin{smallmatrix} M' & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right) \setminus \left(\begin{smallmatrix} M & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right) = 0$, da $\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ein $\mathbf{Z}$-fin-Quasiisomorphismus ist; cf. Bemerkung 221.

Dies zeigt die *Behauptung.*

4. *Wäre* nun $\bar{L}$ eine Äquivalenz, so nach vorstehenden beiden Behauptungen auch das Kompositum

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{Z}\text{-lat} \longrightarrow \mathbf{Q}\text{-mod}) \\
:= \; & (\mathbf{Z}\text{-lat} \hookrightarrow \mathbf{Z}\text{-mod} \xrightarrow{R} \mathbf{Z}\text{-mod}/\mathbf{Z}\text{-fin} \xrightarrow{\bar{L}} \mathbf{Z}\text{-mod}/\!\!/\mathbf{Z}\text{-fin} \xrightarrow{\bar{\bar{F}}} \mathbf{Q}\text{-mod}) \\
= \; & (\mathbf{Z}\text{-lat} \hookrightarrow \mathbf{Z}\text{-mod} \xrightarrow{L} \mathbf{Z}\text{-mod}/\!\!/\mathbf{Z}\text{-fin} \xrightarrow{\bar{\bar{F}}} \mathbf{Q}\text{-mod}) \\
= \; & (\mathbf{Z}\text{-lat} \hookrightarrow \mathbf{Z}\text{-mod} \xrightarrow{F} \mathbf{Q}\text{-mod}) .
\end{aligned}$$

Dieses schickt aber den Nichtisomorphismus $\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z}$ bis auf isomorphe Ersetzung auf den Isomorphismus $\mathbf{Q} \xrightarrow{2} \mathbf{Q}$, und wir haben einen *Widerspruch.*

Cf. auch Aufgabe 75.

7.3 Freydkategorie

7.3.1 Begriff der schwach abelschen Kategorie

Sei $\mathcal{K}$ eine additive Kategorie.

Definition 228 Sei $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathcal{K}$ gegeben.

(1) Ein Morphismus $K \xrightarrow{i} X$ heißt *schwacher Kern* von f, falls $if = 0$ und falls für jeden Morphismus $T \xrightarrow{t} X \xrightarrow{f} Y$ mit $tf = 0$ ein Morphismus $T \xrightarrow{t'} K$ mit $t'i = t$ existiert.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, "f"] & Y \\ T \arrow[u, dotted, "\exists t'"] \arrow[ur, "t"] \arrow[urr, "0"'] & & \end{tikzcd}$$

(1°) Ein Morphismus $Y \xrightarrow{r} C$ heißt *schwacher Cokern* von f, falls $fr = 0$ und falls für jeden Morphismus $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{t} T$ mit $ft = 0$ ein Morphismus $C \xrightarrow{t'} T$ mit $rt' = t$ existiert.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[drr, "0"'] & Y \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "t"] & C \arrow[d, dotted, "\exists t'"] \\ & & T \end{tikzcd}$$

Cf. Definition 118.

Definition 229 Die additive Kategorie $\mathcal{K}$ heißt *schwach abelsch,* falls folgende Bedingungen erfüllt sind.

(SAb 1) Jeder Morphismus in $\mathcal{K}$ hat einen schwachen Kern.

(SAb 1°) Jeder Morphismus in $\mathcal{K}$ hat einen schwachen Cokern.

(SAb 2) Jeder Morphismus in $\mathcal{K}$ ist ein schwacher Kern eines Morphismus in $\mathcal{K}$.

(SAb 2°) Jeder Morphismus in $\mathcal{K}$ ist ein schwacher Cokern eines Morphismus in $\mathcal{K}$.

Cf. Definition 120.

Vorsicht, i.a. sind abelsche Kategorien nicht schwach abelsch. Z.B. ist in $\mathbf{Z}$-Mod der Morphismus $\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z}$ kein schwacher Cokern eines Morphismus $X \longrightarrow \mathbf{Z}$. Denn dieser Morphismus wäre wegen $\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z}$ monomorph notwendig gleich 0. Sodann wäre $(X \xrightarrow{0} \mathbf{Z} \xrightarrow{1} \mathbf{Z}) = (X \xrightarrow{0} \mathbf{Z})$, wohingegen $\mathbf{Z} \xrightarrow{1} \mathbf{Z}$ nicht über $\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z}$ faktorisiert.

Beispiel 230

(1) Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Wir wollen zeigen, daß $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ eine schwach abelsche Kategorie ist. Cf. §5.2. Dank Dualität genügt es, (SAb 1°, 2) nachzuweisen.

Zu (SAb 1°).

Sei $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ ein Repräsentant eines Morphismus in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$, zu dem die Existenz eines schwachen Cokerns gezeigt werden soll. Sei $X \xrightarrow{c_X} C_X$ der punktweise split Monomorphismus in den split azyklischen Komplex C_X aus der Lösung zu Aufgabe 55.(1). Wir bilden in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ einen Pushout

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "c_X"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ C_X \arrow[r, "t"] \arrow[ur, phantom, "\lrcorner"] & T \end{tikzcd} ;$$

cf. Korollar 135.(2).

Wir *behaupten,* daß g ein schwacher Cokern zu f in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ ist.

Zum einen repräsentiert fg einen Nullmorphismus in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$, da $fg = c_X t$ und da C_X split azyklisch, also isomorph zu 0 in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ ist.

Sei zum anderen $Y \xrightarrow{u} U$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ ein Repräsentant eines Morphismus in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$, der komponiert mit der Restklasse von f in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ verschwindet. Dann gibt es einen Morphismus $C_X \xrightarrow{v} U$ mit $fu = tv$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$; cf. Aufgabe 55.(1). Die universelle Eigenschaft des Pushouts gibt folgendes kommutative Diagramm in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "c_X"'] & Y \arrow[d, "g"] \arrow[ddr, bend left, "u"] & \\ C_X \arrow[r, "t"] \arrow[drr, bend right, "v"'] & T \arrow[dr, "w"] \arrow[ur, phantom, "\lrcorner"] & \\ & & U \end{tikzcd}$$

Insbesondere gilt $gw = u$ auch noch in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$.

Zu (SAb 2).

Sei $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ ein Repräsentant eines Morphismus in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$, von dem gezeigt werden soll, daß er ein schwacher Kern ist. Da $X \xrightarrow{f} Y$ und $X \xrightarrow{(f\; c_X)} Y \oplus C_X$ in $[\![\Delta_1\, , \mathrm{K}(\mathcal{A})]\!]$ isomorph sind, weil C_X in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ isomorph zu 0 ist, genügt es zu zeigen, daß $(f\; c_X)$ in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ einen schwachen Kern repräsentiert. Somit dürfen wir o.E. annehmen, daß f selbst punktweise split monomorph ist.

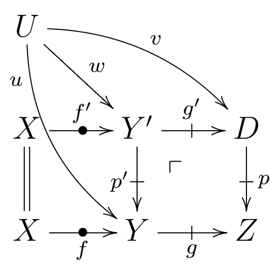
Wir ergänzen zu einer punktweise split kurz exakten Sequenz

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z\ .$$

Wir wollen zeigen, daß f in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ ein schwacher Kern von g ist.

Sei $U \xrightarrow{u} Y$ gegeben mit ug nullhomotop.

Die zur Lösung der Aufgabe 55.(1) duale Konstruktion gibt einen punktweise split Epimorphismus $D \xrightarrow{p} Z$ mit D split azyklisch und eine Faktorisierung $ug = vp$. Nach Eintragen und Ausnutzen eines Pullbacks (Y', D, Y, Z) und eines Kerns erhalten wir das folgende kommutative Diagramm in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ mit kurz exakten Zeilen; cf. Lemma 134.



Können wir zeigen, daß es ein $X \xleftarrow{r} Y'$ mit $f'r = 1$ gibt, so folgt $(wr)f - u = wrf'p' - wp' = w(rf' - 1)p'$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Aber da $f'(rf' - 1) = 0$, faktorisiert $rf' - 1$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ über D. Da D split azyklisch ist, folgt, daß in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ in der Tat $(wr)f = u$ ist.

Es genügt zu zeigen, daß g' in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ eine Retraktion ist, da dies nach Aufgabe 51.(2°) impliziert, daß f' eine Coretraktion ist.

Zeigen wir zunächst, daß g' punktweise split epimorph ist. Hierzu genügt es dank Aufgabe 51.(2°) zu zeigen, daß in $\mathcal{A}$ ein Pullback eines Morphismus $A' \xrightarrow{a} A$ entlang $A \oplus B \xrightarrow{\binom{1}{0}} A$ wieder eine Retraktion ist. In der Tat zeigt das Kern-Cokern-Kriterium, Lemma 134, daß

$$\begin{array}{ccc} A' \oplus B & \xrightarrow{\binom{1}{0}} & A' \\ {\scriptstyle \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle a} \\ A \oplus B & \xrightarrow{\binom{1}{0}} & A \end{array}$$

ein Pullback ist.

Bleibt zu zeigen, daß in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ der punktweise split Epimorphismus $Y' \overset{g'}{\twoheadrightarrow} D$ mit split azyklischem Zielobjekt D eine Retraktion ist. Ohne Einschränkung ist dieser punktweise split Epimorphismus von der Form

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A^{i-1} \oplus A^i \oplus B^{i-1} \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 0 & k^{i-1} \\ 1 & 0 & \ell^{i-1} \\ 0 & 0 & m^{i-1} \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}"'] & A^i \oplus A^{i+1} \oplus B^i \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 0 & k^i \\ 1 & 0 & \ell^i \\ 0 & 0 & m^i \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}"'] & A^{i+1} \oplus A^{i+2} \oplus B^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & A^{i-1} \oplus A^i \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}"] & A^i \oplus A^{i+1} \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}"] & A^{i+1} \oplus A^{i+2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

mit $k^{i-1}m^i = 0$, $k^i + \ell^{i-1}m^i = 0$ und $m^{i-1}m^i = 0$ für alle $i \in \mathbf{Z}$. Als zugehörige Coretraktion können wir daher

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A^{i-1} \oplus A^i \oplus B^{i-1} \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 0 & k^{i-1} \\ 1 & 0 & \ell^{i-1} \\ 0 & 0 & m^{i-1} \end{pmatrix}"] & A^i \oplus A^{i+1} \oplus B^i \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 0 & k^i \\ 1 & 0 & \ell^i \\ 0 & 0 & m^i \end{pmatrix}"] & A^{i+1} \oplus A^{i+2} \oplus B^{i+1} \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & A^{i-1} \oplus A^i \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}"] \arrow[u, "\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ell^{i-2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}"] & A^i \oplus A^{i+1} \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}"] \arrow[u, "\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ell^{i-1} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}"] & A^{i+1} \oplus A^{i+2} \arrow[r] \arrow[u, "\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ell^i \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

wählen.

Allgemeiner ist jede sogenannte *triangulierte* Kategorie schwach abelsch.

(2) Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genügend Injektiven und genügend Projektiven. Sei ferner vorausgesetzt, daß ein Objekt in $\mathcal{A}$ genau dann injektiv ist, wenn es projektiv ist. Dann heißt $\mathcal{A}$ auch eine *abelsche Frobeniuskategorie.*

Für p prim und $n \geqslant 1$ ist z.B. $\mathbf{Z}/p^n$-mod eine abelsche Frobeniuskategorie; cf. Aufgabe 54.(1, 2).

Wir wollen zeigen, daß $\operatorname{Proj}\mathcal{A}$ $(= \operatorname{Inj}\mathcal{A})$ eine schwach abelsche Kategorie ist. Dank Dualität genügt es, (SAb 1, 2°) nachzuweisen.

Zu (SAb 1). Sei $X \xrightarrow{f} Y$ in $\operatorname{Proj}\mathcal{A}$ gegeben. Wir wählen ein Diagramm

$$P \overset{u}{\twoheadrightarrow} \mathrm{K}_f \overset{\iota}{\rightarrowtail} X \xrightarrow{f} Y$$

in $\mathcal{A}$ mit P projektiv und wollen zeigen, daß $u\,\iota$ in $\operatorname{Proj}\mathcal{A}$ ein schwacher Kern von f ist.

Sei $Q \xrightarrow{q} X$ mit Q projektiv und $qf = 0$ gegeben. Dann gibt es ein q' mit $q'\iota = q$. Wegen Q projektiv und u epimorph gibt es ein q'' mit $q''u = q'$. Insgesamt ist also $q''(u\,\iota) = q'\iota = q$.

Zu (SAb 2°). Sei $X \xrightarrow{f} Y$ in $\operatorname{Proj}\mathcal{A}$ gegeben. Wieder wählen wir ein Diagramm

$$P \overset{u}{\twoheadrightarrow} \mathrm{K}_f \overset{\iota}{\rightarrowtail} X \overset{\bar{f}}{\twoheadrightarrow} \mathrm{I}_f \overset{\dot{f}}{\rightarrowtail} Y$$

in $\mathcal{A}$ mit P projektiv und wollen zeigen, daß f ein schwacher Cokern von $u\,\iota$ ist.

Sei $X \xrightarrow{r} R$ mit R projektiv und $(u\,\iota)r = 0$ gegeben. Wegen u epimorph ist $\iota\, r = 0$. Also gibt es ein r' mit $\bar{f}r' = r$; cf. Bemerkung 124.(1). Wegen R auch injektiv und $\dot{f}$ monomorph gibt es ein r'' mit $\dot{f}r'' = r'$. Insgesamt ist also $fr'' = \bar{f}\dot{f}r'' = \bar{f}r' = r$.

7.3.2 Konstruktion der Freydkategorie

Sei $\mathcal{K}$ eine schwach abelsche Kategorie; cf. Definition 229.

Definition 231 Sei $[\![\Delta_1\,,\mathcal{K}]\!]_0$ die volle additive Teilkategorie in $[\![\Delta_1\,,\mathcal{K}]\!]$ der Objekte der Form $X \xrightarrow{0} Y$, wobei $X,\, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}$.

Definiere die *Freydkategorie* $\hat{\mathcal{K}}$ von $\mathcal{K}$ als Faktorkategorie

$$\hat{\mathcal{K}} \;:=\; [\![\Delta_1\,,\mathcal{K}]\!]/[\![\Delta_1\,,\mathcal{K}]\!]_0\;;$$

cf. Definition 114.

Es ist $\hat{\mathcal{K}}$ eine additive Kategorie; cf. Aufgabe 50.(1), Bemerkung 115.

Objekte in $\hat{\mathcal{K}}$ sind also gegeben durch Morphismen in $\mathcal{K}$.

Morphismen in $\hat{\mathcal{K}}$ werden durch kommutative Vierecke in $\mathcal{K}$ repräsentiert.

Seien $(X \xrightarrow{f} Y)$, $(X' \xrightarrow{f'} Y') \in \operatorname{Ob}\hat{\mathcal{K}}$. Sei

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x"'] & Y \arrow[d, "y"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd}$$

ein Morphismus in $[\![\Delta_1\,,\mathcal{K}]\!]$, i.e. sei $fy = xf'$. Der vom Morphismus

$$(X \xrightarrow{f} Y) \xrightarrow{(x,y)} (X' \xrightarrow{f'} Y')$$

aus $[\![\Delta_1\,,\mathcal{K}]\!]$ in $\hat{\mathcal{K}}$ repräsentierte Morphismus werde

$$(X \xrightarrow{f} Y) \xrightarrow{[x,y]} (X' \xrightarrow{f'} Y')$$

geschrieben.

Bemerkung 232 *Seien* $(X \xrightarrow{f} Y)$, $(X' \xrightarrow{f'} Y') \in \operatorname{Ob}\hat{\mathcal{K}}$. *Seien*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x"'] & Y \arrow[d, "y"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\tilde{x}"'] & Y \arrow[d, "\tilde{y}"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd}$$

zwei Morphismen von $(X \xrightarrow{f} Y)$ *nach* $(X' \xrightarrow{f'} Y')$ *in* $[\![\Delta_1\,,\mathcal{K}]\!]$.

Es ist $[x,y] = [\tilde{x},\tilde{y}]$ *genau dann, wenn* $(x-\tilde{x})f' = f(y-\tilde{y})$ *gleich null ist.*

Beweis. O.E. ist $\tilde{x} = 0$ und $\tilde{y} = 0$.

Es ist $[x, y] = [0, 0]$ genau dann, wenn es in $\mathcal{K}$ ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x_1"'] & Y \arrow[d, "y_1"] \\ \bar{X} \arrow[r, "0"] \arrow[d, "x_2"'] & \bar{Y} \arrow[d, "y_2"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd}$$

mit $x = x_1 x_2$ und $y = y_1 y_2$ gibt.

Gibt es solch ein Diagramm, dann ist $xf' = x_1 x_2 f' = x_1 \cdot 0 \cdot y_2 = 0$.

Ist umgekehrt $xf' = 0$, dann existiert ein solches Diagramm mit $x_1 := \mathrm{id}_X$, $x_2 := x$, $y_1 := y$ und $y_2 := \mathrm{id}_{Y'}$. ▫

7.3.3 Freydkategorie abelsch

Sei $\mathcal{K}$ eine schwach abelsche Kategorie; cf. Definition 229.

Satz 233 (Freydkategorie abelsch)

(1) *Es ist die Freydkategorie $\hat{\mathcal{K}}$ abelsch; cf. Definitionen* 231 *und* 120.

(2) *Jeder Monomorphismus in $\hat{\mathcal{K}}$ ist isomorph in $[\![\Delta_1, \hat{\mathcal{K}}]\!]$ zu einem Morphismus der Form $[x, \mathrm{id}_Y]$; jeder Morphismus dieser Form ist monomorph.*

(2°) *Jeder Epimorphismus in $\hat{\mathcal{K}}$ ist isomorph in $[\![\Delta_1, \hat{\mathcal{K}}]\!]$ zu einem Morphismus der Form $[\mathrm{id}_X, y]$; jeder Morphismus dieser Form ist epimorph.*

(3) *Jede kurz exakte Sequenz in $\hat{\mathcal{K}}$ ist isomorph in $[\![\Delta_2, \hat{\mathcal{K}}]\!]$ zu einer der Form*

$$(X' \xrightarrow{xf} Y) \xrightarrow{[x, \mathrm{id}_Y]} (X \xrightarrow{f} Y) \xrightarrow{[\mathrm{id}_X, y]} (X \xrightarrow{fy} Y'') ,$$

wobei y ein schwacher Cokern von xf ist; jede solche Sequenz ist kurz exakt.

(3°) *Jede kurz exakte Sequenz in $\hat{\mathcal{K}}$ ist isomorph in $[\![\Delta_2, \hat{\mathcal{K}}]\!]$ zu einer der Form*

$$(X' \xrightarrow{xf} Y) \xrightarrow{[x, \mathrm{id}_Y]} (X \xrightarrow{f} Y) \xrightarrow{[\mathrm{id}_X, y]} (X \xrightarrow{fy} Y'') ,$$

wobei x ein schwacher Kern von fy ist; jede solche Sequenz ist kurz exakt.

Beweis. Nach Konstruktion ist $\hat{\mathcal{K}}$ additiv; cf. Definition 231.

Schritt 1. *Ein Morphismus in* $\hat{\mathcal{K}}$ *der Form* $(X \xrightarrow{f} Y) \xrightarrow{[x,\mathrm{id}_Y]} (X' \xrightarrow{f'} Y)$ *ist monomorph.*

Dies zeigt dann den zweiten Teil von (2).

Sei $[s,t]$ so gegeben, daß $[0,0] = [s,t][x,\mathrm{id}_Y] = [sx,t]$. Dann ist $sxf' = sf = 0$. Also ist auch $[s,t] = [0,0]$.

Schritt 2. *Sei* $(X \xrightarrow{f} Y) \xrightarrow{[x,y]} (X' \xrightarrow{f'} Y')$ *in* $\hat{\mathcal{K}}$ *gegeben. Sei* $K \xrightarrow{i} X$ *in* $\mathcal{K}$ *ein schwacher Kern von* $xf' = fy$. *Dann ist* $(K \xrightarrow{if} Y) \xrightarrow{[i,\mathrm{id}_Y]} (X \xrightarrow{f} Y)$ *ein Kern von* $(X \xrightarrow{f} Y) \xrightarrow{[x,y]} (X' \xrightarrow{f'} Y')$.

Dies zeigt dann (Ab 1) für (1).

Es ist $[i,\mathrm{id}_Y][x,y] = [0,0]$, da $ify = 0$.

Sei $(S \xrightarrow{g} T) \xrightarrow{[s,t]} (X \xrightarrow{f} Y)$ mit $[0,0] = [s,t][x,y]$, i.e. mit $sxf' = 0$ gegeben. Wir haben die Existenz einer Faktorisierung von $[s,t]$ über $[i,\mathrm{id}_Y]$ zu zeigen; die Eindeutigkeit folgt dann mit Schritt 1.

Da i in $\mathcal{K}$ ein schwacher Kern von xf' ist, gibt es ein s' mit $s'i = s$. Es ist $s'if = sf = gt$. Folglich ist $[s,t] = [s',t][i,\mathrm{id}_Y]$.

$$\begin{tikzcd}
 & S \arrow[rr, "g"] \arrow[dl, "s'"'] \arrow[ddl, "s"] & & T \arrow[dl, "t"] \arrow[ddl, "t"] \\
K \arrow[rr, "if"] \arrow[d, "i"'] & & Y \arrow[d, equal] & \\
X \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "x"'] & & Y \arrow[d, "y"] & \\
X' \arrow[rr, "f'"] & & Y' &
\end{tikzcd}$$

Schritt 3. *Ein Morphismus in* $\hat{\mathcal{K}}$ *der Form* $(X \xrightarrow{f} Y) \xrightarrow{[x,\mathrm{id}_Y]} (X' \xrightarrow{f'} Y)$ *ist ein Kern eines Morphismus in* $\hat{\mathcal{K}}$.

Sei $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathcal{K}$ ein schwacher Kern von $Y \xrightarrow{z} Z$.

Es ist $[x,\mathrm{id}_Y][\mathrm{id}_{X'},z] = [0,0]$, da $fz = 0$.

Sei $(S \xrightarrow{g} T) \xrightarrow{[s,t]} (X \xrightarrow{f} Y)$ mit $[0,0] = [s,t][\mathrm{id}_{X'},z]$, i.e. mit $sf'z = 0$ gegeben. Wir haben die Existenz einer Faktorisierung von $[s,t]$ über $[x,\mathrm{id}_Y]$ zu zeigen; die Eindeutigkeit folgt dann mit Schritt 1.

Da f in $\mathcal{K}$ ein schwacher Kern von z ist, gibt es ein s' mit $s'f = sf'$. Es ist $s'f = sf' = gt$.

Es ist $g(t \cdot \mathrm{id}_Y - t) = 0$. Folglich ist $[s,t] = [s',t][x,\mathrm{id}_Y]$.

$$\begin{tikzcd}
 & S \arrow[rr, "g"] \arrow[dl, "s'"'] \arrow[ddl, "s"] & & T \arrow[dl, "t"] \arrow[ddl, "t"] \\
X \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "x"'] & & Y \arrow[d, equal] & \\
X' \arrow[rr, "f'"] \arrow[d, equal] & & Y \arrow[d, "z"] & \\
X' \arrow[rr, "f'z"] & & Z &
\end{tikzcd}$$

Schritt 4. *Jeder Monomorphismus in $\hat{\mathcal{K}}$ ist isomorph in $[\![\Delta_1, \hat{\mathcal{K}}]\!]$ zu einem Morphismus der Form $[x, \mathrm{id}_Y]$. Jeder Monomorphismus in $\hat{\mathcal{K}}$ ist ein Kern eines Morphismus in $\hat{\mathcal{K}}$.*

Dies zeigt dann den ersten Teil von (2) und (Ab 2) für (1).

Sei $(X \xrightarrow{f} Y) \xrightarrow{[x,y]} (X' \xrightarrow{f'} Y')$ ein Monomorphismus. Es ist $[x,y] = [\mathrm{id}_X, y][x, \mathrm{id}_{Y'}]$. Daher ist $[\mathrm{id}_X, y]$ monomorph; cf. Aufgabe 32.(1).

Nach Schritt 3° ist $[\mathrm{id}_X, y]$ ein Cokern eines Morphismus $[s,t]$ in $\hat{\mathcal{K}}$. Insbesondere ist $[s,t][\mathrm{id}_X, y] = 0$. Da $[\mathrm{id}_X, y]$ monomorph ist, folgt $[s,t] = 0$. Also ist $[\mathrm{id}_X, y]$ ein Isomorphismus; cf. Bemerkung 119.(4°, 2°).

Nach Schritt 3 ist $[x, \mathrm{id}_{Y'}]$ Kern eines Morphismus $[u,v]$ in $\hat{\mathcal{K}}$. Da $[\mathrm{id}_X, y]$ ein Isomorphismus ist, ist auch $[x,y] = [\mathrm{id}_X, y][x, \mathrm{id}_{Y'}]$ ein Kern von $[u,v]$; cf. Bemerkung 119.(5).

Schritt 5. *Jede kurz exakte Sequenz in $\hat{\mathcal{K}}$ ist isomorph in $[\![\Delta_2, \hat{\mathcal{K}}]\!]$ zu einer der Form*

$$(X' \xrightarrow{xf} Y') \xrightarrow{[x,\mathrm{id}_Y]} (X \xrightarrow{f} Y) \xrightarrow{[\mathrm{id}_X, y]} (X \xrightarrow{fy} Y''),$$

wobei y ein schwacher Cokern von xf ist. Jede Sequenz dieser Form ist kurz exakt.

Dies zeigt dann (3).

Nach Schritt 2° und Schritt 1 ist eine Sequenz dieser Form kurz exakt.

Sei umgekehrt eine kurz exakte Sequenz in $\hat{\mathcal{K}}$ gegeben. Nach Schritt 4 ist ihr Monomorphismus isomorph zu einem der Form $[x, \mathrm{id}_Y]$. Sei y ein schwacher Cokern von xf. Nach Schritt 2° ist $[\mathrm{id}_X, y]$ ein Cokern von $[x, \mathrm{id}_Y]$. Nach Bemerkung 124.(2) wird nun auf den Cokernen ein Isomorphismus so induziert, daß die gegebene kurz exakte Sequenz isomorph zur kurz exakten Sequenz $([x, \mathrm{id}_Y], [\mathrm{id}_X, y])$ ist. ▫

7.3.4 Einbettung von $\mathcal{K}$ in $\hat{\mathcal{K}}$

Bemerkung 234

(1) *Wir haben einen vollen und treuen additiven Funktor*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K} & \xrightarrow{E=E_{\mathcal{K}}} & \hat{\mathcal{K}} \\ (X \xrightarrow{f} Y) & \longmapsto & \big((X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X) \xrightarrow{[f,f]} (Y \xrightarrow{\mathrm{id}_Y} Y)\big) \end{array}$$

(2) *Jedes Objekt im Bild von E ist injektiv und projektiv.*

(3) *Zu allen Objekten aus $\hat{\mathcal{K}}$ gibt es einen Epimorphismus von einem Objekt aus dem Bild von E.*

(3°) *Von allen Objekten aus $\hat{\mathcal{K}}$ gibt es einen Monomorphismus zu einem Objekt aus dem Bild von E.*

Wir schreiben auch $\hat{X} := EX$ für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}$ und $\hat{f} := Ef$ für $f \in \operatorname{Mor}\mathcal{K}$.

Beweis.

Zu (1). Der Funktor E ist additiv, da $\left(\begin{smallmatrix} E\pi_1 & E\pi_2 \end{smallmatrix}\right) : E(X \oplus Y) \longrightarrow EX \oplus EY$ (bei der sich aus der Konstruktion ergebenden Wahl der direkten Summe auf $\hat{\mathcal{K}}$) die Identität ist für $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}$; cf. Definition 110.

Der Funktor E ist treu, da $[f, f] = [0, 0]$ genau dann gilt, wenn $f = \mathrm{id}_X f = 0$ ist. Er ist voll, da jeder Morphismus von $(X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X)$ nach $(Y \xrightarrow{\mathrm{id}_Y} Y)$ in $\hat{\mathcal{K}}$ von der Form $[f, f]$ ist.

Zu (2). Sei $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}$ gegeben. Wir wollen zeigen, daß $(X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X)$ projektiv ist.

Sei $(Y \xrightarrow{g} Z) \xrightarrow{[y,z]} (Y' \xrightarrow{g'} Z')$ in $\hat{\mathcal{K}}$ gegeben.

Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Hom}_{\mathcal{K}}(X, Y) & \xrightarrow{\lambda_g} & \operatorname{Hom}_{\hat{\mathcal{K}}}\big((X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X), (Y \xrightarrow{g} Z)\big) \\ s & \longmapsto & [s, sg] \end{array}$$

ist surjektiv, da jeder Morphismus in $\hat{\mathcal{K}}$ von der angegebenen Form ist. Das Viereck

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}_{\mathcal{K}}(X, Y) \arrow[r, "\lambda_g"] \arrow[d, "\operatorname{Hom}_{\mathcal{K}}(X,y)"'] & \operatorname{Hom}_{\hat{\mathcal{K}}}\big((X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X), (Y \xrightarrow{g} Z)\big) \arrow[d, "\operatorname{Hom}_{\hat{\mathcal{K}}}\big((X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X),[y,z]\big)"] \\ \operatorname{Hom}_{\mathcal{K}}(X, Y') \arrow[r, "\lambda_{g'}"] & \operatorname{Hom}_{\hat{\mathcal{K}}}\big((X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X), (Y' \xrightarrow{g'} Z')\big) \end{tikzcd}$$

kommutiert, da zum einen $s \longmapsto [s, sg] \longmapsto [sy, sgz]$ und zum anderen $s \longmapsto sy \longmapsto [sy, syg'] = [sy, sgz]$ abgebildet wird.

Sei $[y,z]$ nun ein Epimorphismus. Wir haben zu zeigen, daß $\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{K}}}\big((X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X),[y,z]\big)$ surjektiv ist. Nach Satz 233.(2°) ist $[y,z]$ isomorph zu einem Morphismus mit einer Identität als erstem Eintrag. Also ist o.E. $y = \mathrm{id}_Y$. Diesenfalls steht in unserem kommutativen Viereck links eine Identität, so daß die Surjektivität von $\lambda_{g'}$ die Surjektivität von $\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{K}}}\big((X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X),[y,z]\big)$ nach sich zieht.

Zu $(3,3°)$. Sei $(X \xrightarrow{f} Y) \in \mathrm{Ob}\,\hat{\mathcal{K}}$ gegeben. In $\hat{\mathcal{K}}$ wird

$$(X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X) \overset{[\mathrm{id}_X,\,f]}{\rightarrowtail} (X \xrightarrow{f} Y) \overset{[f,\mathrm{id}_Y]}{\twoheadrightarrow} (Y \xrightarrow{\mathrm{id}_Y} Y)\,.$$

□

Definition 235 In einer additiven Kategorie heiße ein Objekt U ein *direkter Summand* eines Objektes B, wenn es ein Objekt A' mit $A \oplus A' \simeq B$ gibt.

Korollar 236

(1) *Ein Objekt in $\hat{\mathcal{K}}$ ist genau dann projektiv, wenn es injektiv ist.*

(2) *Die projektiven Objekte von $\hat{\mathcal{K}}$ sind genau die direkten Summanden von Objekten im Bild von E.*

Cf. Beispiel 230.(2).

Beweis.

Zu (2). Ein direkter Summand eines Objekts im Bild von E ist projektiv; cf. Bemerkungen 234.(2) und 141.

Sei umgekehrt P ein projektives Objekt von $\hat{\mathcal{K}}$. Wähle $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$ mit $\hat{X} \overset{x}{\rightarrowtail} P$; cf. Bemerkung 234.(3). Wegen P projektiv ist der Epimorphismus x eine Retraktion; verwende hierzu ein Urbild von id_P unter der Surjektion $\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{K}}}(P,x)$. Also ist $\hat{X} \simeq \mathrm{K}_x \oplus P$; cf. Aufgabe 51.(2°).

Zu (1). Dies folgt aus (2) und (2°). □

7.3.5 Exakte Sequenzen

Sei $\mathcal{K}$ eine schwach abelsche Kategorie; cf. Definition 229.

Definition 237 In einer abelschen Kategorie heiße eine Sequenz $U \xrightarrow{a} V \xrightarrow{b} W$ *exakt bei V* oder *exakt in der Mitte,* falls die Sequenz $\mathrm{I}_a \overset{\dot{a}}{\twoheadrightarrow} V \overset{\bar{b}}{\rightarrowtail} \mathrm{I}_b$ kurz exakt ist; cf. Definitionen 125.(1) und 130.

Bemerkung 238 (und Definition) *Sei $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ in $\mathcal{K}$ gegeben. Folgende Aussagen sind äquivalent.*

(1) *Es ist f ein schwacher Kern von g.*

(1°) *Es ist g ein schwacher Cokern von f.*

(2) *Es ist die Sequenz $\hat{X} \xrightarrow{\hat{f}} \hat{Y} \xrightarrow{\hat{g}} \hat{Z}$ exakt bei $\hat{Y}$.*

Diesenfalls heiße die Sequenz $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ exakt bei Y *oder* exakt in der Mitte.

Beweis.

Zu (1) $\Rightarrow$ (2). Sei f ein schwacher Kern von g.

Wegen $\hat{f}\hat{g} = 0$ können wir $\hat{f} = f'\iota_{\hat{g}}$ faktorisieren. Wir wollen zeigen, daß f' epimorph ist.

Wiederholt wird verwandt werden, daß E voll, treu und additiv ist ; cf. Bemerkung 234.(1).

Wähle $U \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}$ mit $\hat{U} \overset{u}{\dashrightarrow} \mathrm{K}_{\hat{g}}$; cf. Bemerkung 234.(3). Da E voll ist, ist $u\,\iota_{\hat{g}} = \hat{v}$ für ein $U \xrightarrow{v} Y$ in $\mathcal{K}$. Es ist $\hat{v}\hat{g} = u\,\iota_{\hat{g}}\hat{g} = 0$, wegen E treu und additiv also $vg = 0$. Da f ein schwacher Kern von g ist, gibt es ein $U \xrightarrow{w} X$ in $\mathcal{K}$ mit $wf = v$. Es folgt

$$u\,\iota_{\hat{g}} \;=\; \hat{v} = \hat{w}\hat{f} \;=\; \hat{w}f'\iota_{\hat{g}}\ ,$$

und somit $u = \hat{w}f'$. Da u epimorph ist, gilt dies auch für f' ; cf. Aufgabe 32.(1°).

$$\begin{tikzcd}
\hat{X} \arrow[rr, "\hat{f}"] \arrow[dr, "f'"'] & & \hat{Y} \arrow[r, "\hat{g}"] & \hat{Z} \\
& \mathrm{K}_{\hat{g}} \arrow[ur, "\iota_{\hat{g}}"'] & & \\
\hat{U} \arrow[uu, "\hat{w}"] \arrow[ur, dashed, "u"'] \arrow[uurr, bend right, "\hat{v}"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Dual dazu gibt es auch eine Faktorisierung $\hat{g} = \rho_{\hat{f}}\, g'$ mit g' monomorph. Daher ist $\iota_{\hat{g}}$ auch ein Kern von $\rho_{\hat{f}}$; cf. Bemerkung 119.(6). Somit ist die Sequenz $(\iota_{\hat{g}}\,, \rho_{\hat{f}})$ kurz exakt. Also ist die Sequenz $(\hat{f}, \hat{g})$ exakt bei $\hat{Y}$; cf. Bemerkungen 124.(3) und 119.(5).

Zu (2) $\Rightarrow$ (1). Sei $\hat{X} \xrightarrow{\hat{f}} \hat{Y} \xrightarrow{\hat{g}} \hat{Z}$ exakt bei $\hat{Y}$. Wir wollen zeigen, daß f ein schwacher Kern von g ist. Sei $U \xrightarrow{u} Y$ mit $ug = 0$ gegeben. Wir wollen zeigen, daß u über f faktorisiert.

Es ist $\hat{u}\hat{g} = 0$. Da $\dot{\hat{f}}$ ein Kern von $\bar{\hat{g}}$ ist und da $\bar{\hat{g}}\dot{\hat{g}} = \hat{g}$ mit $\dot{\hat{g}}$ monomorph ist, ist $\dot{\hat{f}}$ auch ein Kern von $\hat{g}$; cf. Bemerkung 119.(6). Also gibt es ein $\hat{U} \xrightarrow{u'} \mathrm{I}_{\hat{f}}$ mit $u'\dot{\hat{f}} = \hat{u}$.

Wegen $\hat{U}$ projektiv und $\bar{\hat{f}}$ epimorph und E voll gibt es ein $U \xrightarrow{u''} X$ mit $\hat{u}''\bar{\hat{f}} = u'$; cf. Bemerkung 234.(2). Insgesamt wird $\hat{u}''\hat{f} = \hat{u}''\bar{\hat{f}}\dot{\hat{f}} = u'\dot{\hat{f}} = \hat{u}$, wegen E treu also $u''f = u$.

$$\begin{tikzcd}
\hat{X} \arrow[r, "\bar{\hat{f}}", "|" marking] & \mathrm{I}_{\hat{f}} \arrow[r, "\dot{\hat{f}}", "\bullet" marking] & \hat{Y} \arrow[r, "\bar{\hat{g}}", "|" marking] & \mathrm{I}_{\hat{g}} \arrow[r, "\dot{\hat{g}}", "\bullet" marking] & \hat{Z} \\
 & & \hat{U} \arrow[ul, "\hat{u}''"] \arrow[u, "\hat{u}"] \arrow[ul, "u'"'] & &
\end{tikzcd}$$

□

7.3.6 Universelle Eigenschaft der Freydkategorie

Sei $\mathcal{K}$ eine schwach abelsche Kategorie; cf. Definition 229.

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien.

Definition 239 Ein additiver Funktor $\mathcal{K} \xrightarrow{F} \mathcal{A}$ heißt *exakt* oder *cohomologisch,* wenn für alle Sequenzen

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

in $\mathcal{K}$, die exakt in der Mitte sind, auch die Sequenz

$$FX \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{Fg} FZ$$

exakt in der Mitte ist.

Es ist e.g. $\mathcal{K} \xrightarrow{E} \hat{\mathcal{K}}$ exakt; cf. Bemerkung 238.

Bezeichne ${}_{\mathrm{ex}}[\![\mathcal{K}, \mathcal{A}]\!]$ die volle additive Teilkategorie von $[\![\mathcal{K}, \mathcal{A}]\!]$ der exakten Funktoren.

Bezeichne ${}_{\mathrm{ex}}[\![\mathcal{A}, \mathcal{B}]\!]$ die volle additive Teilkategorie von $[\![\mathcal{A}, \mathcal{B}]\!]$ der exakten Funktoren im Sinne von Definition 128.(1).

Sind $\mathcal{K} \xrightarrow{F} \mathcal{A}$ und $\mathcal{A} \xrightarrow{G} \mathcal{B}$ exakte Funktoren, so auch $\mathcal{K} \xrightarrow{G \circ F} \mathcal{A}$.

Definition 240 Ein additiver Funktor $\mathcal{K} \xrightarrow{F} \mathcal{A}$ heiße *provisorisch exakt,* wenn für alle Morphismen $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathcal{K}$ ein schwacher Cokern $Y \xrightarrow{g} Z$ so existiert, daß die Sequenz

$$FX \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{Fg} FZ$$

exakt in der Mitte ist.

Bezeichne ${}_{\mathrm{pex}}[\![\mathcal{K}, \mathcal{A}]\!]$ die volle Teilkategorie von $[\![\mathcal{K}, \mathcal{A}]\!]$ der provisorisch exakten Funktoren.

Exakte Funktoren von $\mathcal{K}$ nach $\mathcal{A}$ sind provisorisch exakt.

Ist $\mathcal{K} \xrightarrow{F} \mathcal{A}$ ein provisorisch exakter Funktor und ist $\mathcal{A} \xrightarrow{G} \mathcal{B}$ ein exakter Funktor, so ist $\mathcal{K} \xrightarrow{G \circ F} \mathcal{A}$ provisorisch exakt.

In Korollar 243 werden wir zeigen, daß ein additiver Funktor von $\mathcal{K}$ nach $\mathcal{A}$ genau dann provisorisch exakt ist, wenn er exakt ist. Um dies zeigen zu können, werden wir folgendes Lemma 242 mit dem provisorischen Exaktheitsbegriff durchführen. Die Äquivalenz der beiden Begriffe wird uns dann in Beispiel 244 zugute kommen.

Definition 241 Seien Funktoren $\mathcal{U} \xrightarrow{S} \mathcal{V} \underset{T'}{\overset{T}{\rightrightarrows}} \mathcal{W}$ und eine Transformation $T \xrightarrow{t} T'$ gegeben. Wir definieren die Transformation $T \circ S \xrightarrow{t \circ S} T' \circ S$ als

$$t \circ S \ := \ (tSX)_{X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{U}} \ .$$

Beachte hierzu, daß das Viereck

$$\begin{array}{ccc} (T \circ S)X & \xrightarrow{(t \circ S)X} & (T' \circ S)X \\ {\scriptstyle (T \circ S)f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (T' \circ S)f} \\ (T \circ S)X' & \xrightarrow{(t \circ S)X'} & (T' \circ S)X' \end{array}$$

für $X \xrightarrow{f} Y$ aus $\mathcal{U}$ wegen der Natürlichkeit von t kommutiert.

Lemma 242 (Universelle Eigenschaft der Freydkategorie)
Der additive Funktor

$$\begin{array}{ccc} {}_{\mathrm{ex}}[\![\hat{\mathcal{K}}, \mathcal{B}]\!] & \longrightarrow & {}_{\mathrm{pex}}[\![\mathcal{K}, \mathcal{B}]\!] \\ (F \xrightarrow{a} F') & \longmapsto & (F \circ E \xrightarrow{a \circ E} F' \circ E) \end{array}$$

ist voll, treu und strikt dicht.

Somit haben wir eine inverse Äquivalenz, die jedem provisorisch exakten Funktor $\mathcal{K} \xrightarrow{G} \mathcal{B}$ *einen exakten Funktor* $\hat{\mathcal{K}} \xrightarrow{\hat{G}} \mathcal{B}$ *so zuordnet, daß* $\hat{G} \circ E = G$ *; cf. Lemma* 96.

Beweis.

Zur Additivität. Mit jeweils der punktweise genommenen direkten Summe wird

$$(F \oplus F') \circ E \xrightarrow{(\pi_1 \circ E \ \ \pi_2 \circ E)} (F \circ E) \oplus (F' \circ E)$$

die Identität für $F,\ F' \in \mathrm{Ob}\ {}_{\mathrm{ex}}[\![\hat{\mathcal{K}}, \mathcal{B}]\!]$; cf. Definition 110, Aufgabe 50.(1).

Zur Treuheit. Sei $F \xrightarrow{a} F'$ in ${}_{\mathrm{ex}}[\![\hat{\mathcal{K}}, \mathcal{B}]\!]$ so gegeben, daß $a \circ E = 0$. Wir haben zu zeigen, daß $a \overset{!}{=} 0$.

Sei $U \in \mathrm{Ob}\,\hat{\mathcal{K}}$ gegeben. Wir haben zu zeigen, daß $aU \overset{!}{=} 0$.

Sei $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$ mit $EX \overset{f}{\twoheadrightarrow} U$; cf. Bemerkung 234.(3). Wegen F exakt ist Ff epimorph. Es wird

$$(Ff)(aU) \ = \ (aEX)(F'f) \ = \ 0(F'f) \ = \ 0 \ ,$$

und also $aU = 0$.

Zur Vollheit. Seien $F, F' \in \operatorname{Ob}{}_{\mathrm{ex}}[\![\hat{\mathcal{K}}, \mathcal{B}]\!]$ gegeben. Sei $F \circ E \xrightarrow{b} F' \circ E$ gegeben. Wir haben zu zeigen, daß es ein $F \xrightarrow{a} F'$ mit $a \circ E = b$ gibt.

Sei $U \in \operatorname{Ob} \hat{\mathcal{K}}$. Wir wollen aU definieren. Wir wählen ein $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{K}$ mit $EX \overset{f}{\rightarrowtail} U$ und ein $Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{K}$ mit $U \overset{g}{\twoheadrightarrow} EY$; cf. Bemerkung 234.(3, 3°). Wegen E voll und treu gibt es genau ein $X \xrightarrow{s} Y$ mit $Es = fg$; cf. Bemerkung 234.(1). Insbesondere wird

$$(bX)(F'f)(F'g) \;=\; (bX)((F' \circ E)s) \;=\; ((F \circ E)s)(bY) \;=\; (Ff)(Fg)(bY)\ .$$

Wir können also

$$\begin{tikzcd}
FEX \arrow[r, tail, "Ff"] \arrow[d, "bX"'] & FU \arrow[r, two heads, "Fg"] \arrow[d, "aU"'] & FEY \arrow[d, "bY"] \\
F'EX \arrow[r, tail, "F'f"] & F'U \arrow[r, two heads, "F'g"] & F'EY
\end{tikzcd}$$

setzen; cf. Bemerkung 124.(2).

Wir wollen die Unabhängigkeit von aU von den getroffenen Wahlen nachweisen. Da aU bereits durch die Kommutativität des linken Vierecks bestimmt ist, genügt es, eine alternative Wahl $\tilde{X} \in \operatorname{Ob} \mathcal{K}$ mit $E\tilde{X} \overset{\tilde{f}}{\rightarrowtail} U$ zu betrachten und zu zeigen, daß aus $(F\tilde{f})(\tilde{a}U) = (b\tilde{X})(F'\tilde{f})$ bereits $\tilde{a}U = aU$ folgt.

Wir bilden in $\hat{\mathcal{K}}$ folgenden Pullback, für den wir sogleich ein Objekt $Z \in \operatorname{Ob} \mathcal{K}$ zusammen mit einem Epimorphismus auf den Pullback wählen; cf. Korollar 135.(2), Bemerkung 234.(3). Unter Verwendung von E voll und treu kommutiere insgesamt

$$\begin{tikzcd}
EZ \arrow[dr, two heads] \arrow[drr, two heads, "E\tilde{h}"] \arrow[ddr, two heads, "Eh"'] & & \\
& W \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & E\tilde{X} \arrow[d, tail, "\tilde{f}"] \\
& EX \arrow[r, tail, "f"'] & U\ ;
\end{tikzcd}$$

cf. Bemerkung 234.(1). Wegen F exakt sind u.a. FEh und Ff epimorph.

Es genügt also, $(FEh)(Ff)(\tilde{a}U) \overset{!}{=} (FEh)(Ff)(aU)$ zu zeigen.

In der Tat ergibt sich

$$\begin{aligned}
(FEh)(Ff)(\tilde{a}U) &= (FE\tilde{h})(F\tilde{f})(\tilde{a}U) \\
&= (FE\tilde{h})(b\tilde{X})(F'\tilde{f}) \\
&= (bZ)(F'E\tilde{h})(F'\tilde{f}) \\
&= (bZ)(F'Eh)(F'f) \\
&= (FEh)(bX)(F'f) \\
&= (FEh)(Ff)(aU)\ .
\end{aligned}$$

Wir wollen nachweisen, daß $(aU)_{U\in\operatorname{Ob}\mathcal{K}}$ eine Transformation ist.

Sei $U_1 \xrightarrow{t} U_2$ in $\hat{\mathcal{K}}$ gegeben. Zu zeigen ist, daß $(aU_1)(F't) \overset{!}{=} (Ft)(aU_2)$.

Sei $X_1 \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}$ mit $EX_1 \overset{f_1}{\rightarrowtail} U_1$ und $(Ff_1)(aU_1) = (bX_1)(F'f_1)$ gewählt; möglich nach Konstruktion von a.

Sei $Y_2 \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}$ mit $U_2 \overset{g_2}{\twoheadrightarrow} EY_2$ und $(aU_2)(F'g_2) = (Fg_2)(bY_2)$ gewählt; möglich nach Konstruktion von a.

Wegen F exakt ist Ff_1 epimorph und $F'g_2$ monomorph. Es genügt also, $(Ff_1)(aU_1)(F't)(F'g_2) \overset{!}{=} (Ff_1)(Ft)(aU_2)(F'g_2)$ zu zeigen.

Wegen E voll und treu finden wir ein r mit $Er = f_1tg_2$; cf. Bemerkung 234.(1)

Damit ergibt sich in der Tat

$$\begin{aligned}
(Ff_1)(aU_1)(F't)(F'g_2) &= (bX_1)(F'f_1)(F't)(F'g_2)\\
&= (bX_1)(F'Er)\\
&= (FEr)(bY_2)\\
&= (Ff_1)(Ft)(Fg_2)(bY_2)\\
&= (Ff_1)(Ft)(aU_2)(F'g_2)\ .
\end{aligned}$$

Wir wollen nachweisen, daß $a \circ E \overset{!}{=} b$.

Sei $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}$. Wir haben zu zeigen, daß $aEX \overset{!}{=} bX$. Zur Berechnung von aEX dürfen wir $EX \xrightarrow{1} EX \xrightarrow{1} EX$ verwenden und erhalten in der Tat das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
FEX \arrow[r, tail, "F1"] \arrow[d, "bX"'] & FEX \arrow[r, two heads, "F1"] \arrow[d, "aEX"'] & FEX \arrow[d, "bX"] \\
F'EX \arrow[r, tail, "F'1"] & F'EX \arrow[r, two heads, "F'1"] & F'EX\ .
\end{tikzcd}$$

Zur strikten Dichtheit. Sei gegeben $\mathcal{K} \xrightarrow{G} \mathcal{A}$ provisorisch exakt. Wir definieren einen Funktor $\hat{\mathcal{K}} \xrightarrow{\hat{G}} \mathcal{A}$ wie folgt. Ein Morphismus $[x, y]$ in $\hat{\mathcal{K}}$ ist repräsentiert durch ein kommutatives Viereck

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x"'] & Y \arrow[d, "y"] \\
X' \arrow[r, "f'"] & Y'\ .
\end{tikzcd}$$

Wir bilden

$$\begin{tikzcd}
GX \arrow[r, tail, "\overline{Gf}"] \arrow[d, "Gx"'] & \mathrm{I}_{Gf} \arrow[r, two heads, "\overset{\bullet}{Gf}"] \arrow[d, "z"'] & GY \arrow[d, "Gy"] \\
GX' \arrow[r, tail, "\overline{Gf'}"] & \mathrm{I}_{Gf'} \arrow[r, two heads, "\overset{\bullet}{Gf'}"] & GY'
\end{tikzcd}$$

gemäß Bemerkung 124.(2) und setzen

$$\hat{G}\big((X \xrightarrow{f} Y) \xrightarrow{[x,y]} (X' \xrightarrow{f'} Y')\big) \;:=\; (\mathrm{I}_{Gf} \xrightarrow{z} \mathrm{I}_{Gf'})\;.$$

Der Morphismus z hängt hierbei nicht von der Wahl des Repräsentanten ab. Denn ist $[\tilde{x},\tilde{y}] = [x,y]$, dann ist $f(y-\tilde{y}) = (x-\tilde{x})f' = 0$, also $(\overset{\bullet}{G}f)(Gy - G\tilde{y}) = 0$ und $(Gx - G\tilde{x})(\overline{Gf'}) = 0$, und somit zum einen

$$(G\tilde{x})(\overline{Gf'}) \;=\; (Gx)(\overline{Gf'}) \;=\; (\overline{Gf})z\;,$$

zum anderen

$$(\overset{\bullet}{G}f)(G\tilde{y}) \;=\; (\overset{\bullet}{G}f)(Gy) \;=\; z(\overset{\bullet}{G}f')\;.$$

Da kommutative Vierecke sich zu kommutativen Vierecken zusammensetzen, ist $\hat{G}$ ein Funktor.

Nach Konstruktion ist $\hat{G} \circ E = G$; cf. Bemerkung 124.(1).

Wir wollen zeigen, daß $\hat{G}$ exakt ist. Dazu haben wir zu zeigen, daß $\hat{G}$ kurz exakte Sequenzen in kurz exakte Sequenzen abbildet; cf. Aufgabe 53.

Nach Satz 233.(3) dürfen wir annehmen, daß die abzubildende kurz exakte Sequenz repräsentiert ist von

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "x"'] & Y \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[d, "y"] \\
X \arrow[r, "f''"] & Y''
\end{tikzcd}$$

ist, mit einem beliebig wählbaren schwachen Cokern y von $f' = xf$. Wir wählen y so, daß (Gf', Gy) exakt in der Mitte ist; dies ist möglich wegen G provisorisch exakt; cf. Definition 240. Wir bilden mit G ab und tragen Bildobjekte und gemäß Bemerkung 124.(2) induzierte Morphismen a, b und c ein.

$$\begin{tikzcd}
GX' \arrow[r, tail] \arrow[d, "Gx"'] & \mathrm{I}_{Gf'} \arrow[r, "\overset{\bullet}{G}f'"] \arrow[d, "a"'] & GY \arrow[d, equal] \\
GX \arrow[r, tail] \arrow[dd, equal] & \mathrm{I}_{Gf} \arrow[r, "\overset{\bullet}{G}f"] \arrow[dd, "b"'] & GY \arrow[d, "\overline{Gy}"] \\
 & & \mathrm{I}_{Gy} \arrow[d, "\overset{\bullet}{G}y"] \\
GX \arrow[r, tail] & \mathrm{I}_{Gf''} \arrow[r] \arrow[ur, "c"] & GY''
\end{tikzcd}$$

Darin ist $(\overset{\bullet}{G}f', \overline{Gy})$ kurz exakt. Wir haben zu zeigen, daß das Bild (a, b) unserer kurz exakten Sequenz unter $\hat{G}$ wieder kurz exakt ist.

Das Umfangssequenzlemma, Lemma 132, angewandt auf $a(\overset{\bullet}{G}f) = \overset{\bullet}{G}f'$, gibt ein Diagramm wie folgt.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{C}_a \arrow[dr, "u"] & \\
& \mathrm{I}_{Gf} \arrow[ur, "\rho_a"] \arrow[dr, "\overset{\bullet}{G}f"] & & \\
\mathrm{I}_{Gf'} \arrow[ur, "a"] \arrow[rr, "\overset{\bullet}{G}f'"'] & & GY \arrow[r, "\overline{Gy}"'] & \mathrm{I}_{Gy}
\end{tikzcd}$$

Da $\rho_a u = (\overset{\bullet}{G}f)(\overline{Gy}) = bc$, liefert Bemerkung 124.(3) nun das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{I}_{Gf''} \arrow[dr, "c"] \arrow[dd, "\wr"] & \\
\mathrm{I}_{Gf} \arrow[ur, "b"] \arrow[dr, "\rho_a"'] & & \mathrm{I}_{Gy} \\
& \mathrm{C}_a \arrow[ur, "u"'] &
\end{tikzcd} .$$

Also ist auch b ein Cokern von a. □

Korollar 243 *Sei $\mathcal{K} \xrightarrow{G} \mathcal{B}$ ein additiver Funktor.*

Es ist G exakt genau dann, wenn G provisorisch exakt ist.

Beweis. Sei G provisorisch exakt. Zu zeigen ist, daß G exakt ist.

Es gibt einen exakten Funktor $\hat{\mathcal{K}} \xrightarrow{\hat{G}} \mathcal{B}$ mit $\hat{G} \circ E = G$; cf. Lemma 242. Da E und $\hat{G}$ exakt sind, gilt dies auch für $G = \hat{G} \circ E$; cf. Bemerkung 238, Definition 239. □

Beispiel 244 Es ist $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ schwach abelsch; cf. Beispiel 230.(1).

Sei $k \in \mathbf{Z}$. Wir wollen zeigen, daß $\mathrm{H}^k : \mathrm{K}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$ exakt ist. Es genügt zu zeigen, daß H^k provisorisch exakt ist; cf. Korollar 243.

Sei $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ gegeben. Wir haben einen Morphismus $Y \xrightarrow{g} Z$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ so anzugeben, daß g in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ ein schwacher Cokern von f ist und daß die Sequenz $(\mathrm{H}^k f, \mathrm{H}^k g)$ exakt in der Mitte ist; cf. Definition 240.

Sei $X \xrightarrow{c_X} C_X$ der punktweise split Monomorphismus in den split azyklischen Komplex C_X aus der Lösung zu Aufgabe 55.(1). Da $X \xrightarrow{f} Y$ und $X \xrightarrow{(f\, c_X)} Y \oplus C_X$ in $[\![\Delta_1, \mathrm{K}(\mathcal{A})]\!]$ isomorph sind, weil C_X in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ isomorph zu 0 ist, und da letzterer Morphismus punktweise split monomorph ist, dürfen wir annehmen, daß $X \xrightarrow{f} Y$ selbst punktweise split monomorph ist.

Sei $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ punktweise split kurz exakt in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$. In Beispiel 230 wurde gezeigt, daß g ein schwacher Cokern von f ist; cf. Bemerkung 238. Ferner ist die Sequenz $(\mathrm{H}^k f, \mathrm{H}^k g)$ exakt in der Mitte; cf. die lang exakte Homologiesequenz aus Lemma 145.

Anhang A

Aufgaben

Aufgabe 1 (§1.1.1) Sei R ein Ring. Seien $r,\ s\ \in\ R$.

Zeige, daß $(-r)\cdot s = -(r\cdot s) = r\cdot(-s)$.

Aufgabe 2 (§1.1.1) Sei R ein Ring. Sei $n \geqslant 1$. Zeige.

(1) Es bildet die Menge $R^{n\times n}$ der $n\times n$-Matrizen mit Einträgen in R, der Matrixaddition $(+)$ und der Matrixmultiplikation $(\cdot)$ einen Ring.

(2) Es ist $R^{n\times n}$ nicht kommutativ, falls $n \geqslant 2$ und $0 \neq 1$ in R.

Aufgabe 3 (§1.1.2) Sei R ein Ring. Sei $I \subseteq R$ ein Ideal.

Für $r \in R$ schreiben wir $r + I = \{r + x\ :\ x \in I\}$. Zeige.

(1) Es ist $r + I = r' + I$ genau dann, wenn $r - r' \in I$, wobei $r,\ r'\ \in\ R$.

(2) Es wird $R/I := \{r + I\ :\ r \in R\}$ mittels $(r + I) + (r' + I) := (r + r') + I$ und $(r + I)\cdot(r' + I) := (r\cdot r') + I$ ein Ring. (Hinweis: Wohldefiniertheit!)

Aufgabe 4 (§1.1.2)

(1) Zeige, daß jedes Ideal in $\mathbf{Z}$ von der Form $n\mathbf{Z}$ ist für ein eindeutig bestimmtes $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$.

(2) Zeige, daß $\mathbf{Z}/n$ für $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ genau dann ein Körper ist, wenn n prim ist.

(3) Ein Element r in einem kommutativen Ring heiße *invertierbar,* falls es ein s in diesem Ring gibt mit $rs = 1$.

Finde verschiedene Werte für $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ so, daß $\mathbf{Z}/n$ genau 8 invertierbare Elemente enthält.

Aufgabe 5 (§1.1.1, §1.1.2) Zeige oder widerlege.

(1) Ist R ein Ring, so folgt für $x \in R$ aus $x^2 = 1$, daß $x \in \{-1, +1\}$.

(2) Sei $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$. Sei $x \in \mathbf{Z}/n$ invertierbar. Es ist die *Ordnung* $\min\{i \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1} \ : \ x^i = 1\}$ von x ein Teiler von $n(n-1)$.

Aufgabe 6 (§1.1.3) Sei R ein Ring. Seien $I,\ J \subseteq R$ Ideale in R.

Gebe es ein $x \in I$ und ein $y \in J$ mit $1 = x + y$.

Zeige, daß wir einen Ringisomorphismus

$$\begin{array}{ccccc} R/(I \cap J) & \xrightarrow[\sim]{\varphi} & R/I & \times & R/J \\ r + (I \cap J) & \longmapsto & (r + I & , & r + J) \end{array}$$

haben. Gib die Umkehrabbildung an, unter Verwendung von x und y.

Aufgabe 7 (§1.2.2) Sei R ein Ring. Sei M ein R-Linksmodul. Sei $N \subseteq M$ ein Teilmodul.

Zeige, daß M/N via $(m + N) + (m' + N) := (m + m') + N$ für $m,\ m' \in M$ und via $r \cdot (m + N) := (r \cdot m) + N$ für $r \in R$ und $m \in M$ ein R-Linksmodul wird.

Aufgabe 8 (§1.1.3, §1.2.3)

(1) Sei $R \xrightarrow[\sim]{f} S$ ein Ringisomorphismus, i.e. ein bijektiver Ringmorphismus. Zeige, daß auch $R \xleftarrow{f^{-1}} S$ ein Ringisomorphismus ist.

(2) Sei R ein Ring. Sei $M \xrightarrow[\sim]{g} N$ ein Isomorphismus von R-Linksmoduln, i.e. eine bijektive R-lineare Abbildung. Zeige, daß auch $M \xleftarrow{g^{-1}} N$ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 9 (§1.1.3) Sei $R = (R, +, \cdot)$ ein Ring. Sei R° als Menge gleich R, ausgestattet mit derselben Addition wie R, aber mit der Multiplikation $r * r' := r' \cdot r$, wobei $r,\ r' \in R$. Offenbar ist R° wieder ein Ring, der zu R *entgegengesetzte.*

Zeige oder widerlege.

(1) Seien R und S Ringe. Ist f ein Ringmorphismus von R nach S, so ist f auch ein Ringmorphismus von R° nach S°.

(2) Es ist $\mathbf{Q}^{2\times 2}$ isomorph zu $(\mathbf{Q}^{2\times 2})^\circ$.

(3) Stets ist R isomorph zu R°.

Aufgabe 10 (Elementarteilersatz) Seien $m,\ n \geqslant 0$. Sei $A \in \mathbf{Z}^{m\times n}$.

Zeige, daß es $S \in \mathbf{Z}^{m\times m}$ (ganzzahlig) invertierbar und $T \in \mathbf{Z}^{n\times n}$ (ganzzahlig) invertierbar so gibt, daß SAT eine Diagonalmatrix ist. (Hinweis: Reduziere auf $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & A' \end{smallmatrix}\right)$.)

Aufgabe 11 (§1.2.3) Seien $m,\, n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$.

(1) Zeige, daß jede $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung von $\mathbf{Z}/m$ nach $\mathbf{Z}/n$ von der Form $\mathbf{Z}/m \xrightarrow{a} \mathbf{Z}/n$ ist für ein $a \in \mathbf{Z}$ mit $am \equiv_n 0$.

(2) Wieviele $\mathbf{Z}$-lineare Abbildungen gibt es von $\mathbf{Z}/m$ nach $\mathbf{Z}/n$?

Aufgabe 12 (§1.2.3) Sei $R = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \\ 0 & \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right)$.

(1) Sei $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \overset{\iota}{\hookrightarrow} \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right)$ die Inklusionsabbildung.
Gibt es eine R-lineare Abbildung $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \xleftarrow{f} \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right)$ mit $\iota f = \mathrm{id}$?

(2) Sei $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right) \xrightarrow{\rho} \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right) / \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ die Restklassenabbildung.
Gibt es eine R-lineare Abbildung $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right) \xleftarrow{g} \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right) / \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ mit $g\rho = \mathrm{id}$?

Aufgabe 13 (§1.2.3) Ein $\mathbf{Z}$-Modul M heiße *endlich erzeugt,* wenn es eine endliche Teilmenge $X \subseteq M$ mit $M = {}_{\mathbf{Z}}\langle X \rangle$ gibt.

(1) Sei $M \xrightarrow{p} M''$ eine surjektive $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung zwischen $\mathbf{Z}$-Moduln. Seien M'' und $\operatorname{Kern} p$ endlich erzeugt. Zeige, daß M endlich erzeugt ist.

(2) Sei $\ell \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$. Sei $M \subseteq \mathbf{Z}^{\oplus \ell}$ ein Teilmodul. Zeige, daß M endlich erzeugt ist.
(Hinweis: Sei M'' das Bild von M unter einer Projektion $\mathbf{Z}^{\oplus \ell} \longrightarrow \mathbf{Z}^{\oplus(\ell-1)}$. Der Kern von $M \longrightarrow M''$ bettet nach $\mathbf{Z}$ ein.)

Aufgabe 14 (§1.2.6) Sei R ein Ring. Sei ein kommutatives Viereck

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\xi"'] & Y \arrow[d, "\eta"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd}$$

von R-Linksmoduln und R-linearen Abbildungen gegeben. Zeige.

(1) Es gibt genau eine R-lineare Abbildung $\operatorname{Cokern} f \xrightarrow{c} \operatorname{Cokern} f'$ mit $\eta\rho = \rho c$.

(2) Aus ξ und η surjektiv und $\operatorname{Kern} \eta \subseteq \operatorname{Im} f$ folgt, daß c ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 15 (§1.2.4) Sei R ein Ring. Seien $0 \leqslant \ell \leqslant k$. Seien M_i für $i \in [1,k]$ und N_j für $j \in [1,\ell]$ alles R-Linksmoduln. Sei

$$\delta \;=\; (\delta_{i,j})_{i,j} \;:\; \bigoplus\nolimits_{i\in[1,k]} M_i \;\longrightarrow\; \bigoplus\nolimits_{j\in[1,\ell]} N_j$$

eine R-lineare Abbildung mit $\delta_{i,j} = 0$ falls $i \neq j$. Zeige, daß

$$\operatorname{Cokern} \delta \;\simeq\; \bigoplus\nolimits_{i\in[1,\ell]} \operatorname{Cokern} \delta_{i,i}\ .$$

Aufgabe 16 (§1.2.4) Zeige.

(1) Jeder endlich erzeugte $\mathbf{Z}$-Modul ist isomorph zu einem von der Form $\bigoplus_{i\in[1,\ell]} \mathbf{Z}/e_i$ für ein gewisses $\ell \geqslant 0$ und gewisse $e_i \in \mathbf{Z}$ für $i \in [1,\ell]$, i.e. direkte Summe zyklischer abelscher Gruppen. (Hinweis: Surjektion von $\mathbf{Z}^{\oplus\ell}$, deren Kern, darauf Surjektion von $\mathbf{Z}^{\oplus k}$. Nun Aufgabe 10.)

(2) Jeder endliche $\mathbf{Z}$-Modul ist von der Form $\bigoplus_{i\in[1,\ell]} \mathbf{Z}/e_i$ für ein gewisses $\ell \geqslant 0$ und gewisse $e_i \in \mathbf{Z}_{\geqslant 2}$ für $i \in [1,\ell]$.

Aufgabe 17 (§1.2.9)

(1) Seien $k, \ell \geqslant 0$. Seien $m_i \geqslant 2$ für $i \in [1,k]$. Seien $n_j \geqslant 2$ für $j \in [1,\ell]$. Sei $F = (f_{i,j})_{i,j} \in \mathbf{Z}^{k\times\ell}$ so, daß $m_i f_{i,j} \equiv_{n_j} 0$ für $i \in [1,k]$ und $j \in [1,\ell]$. Schreibe $N := \begin{pmatrix} n_1 & & \\ & \ddots & \\ & & n_\ell \end{pmatrix}$. Weise folgendes kommutative Diagramm von $\mathbf{Z}$-linearen Abbildungen nach.

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i\in[1,k]} \mathbf{Z}/m_i \arrow[r, "F"] & \bigoplus_{j\in[1,\ell]} \mathbf{Z}/n_j \arrow[r, "\rho"] & \operatorname{Cokern} F \\
\mathbf{Z}^{\oplus(k+\ell)} \arrow[u, "\binom{\mathrm{E}_k}{0}"] \arrow[r, "\binom{F}{N}"'] & \mathbf{Z}^{\oplus\ell} \arrow[u, "\mathrm{E}_\ell"'] \arrow[r, "\rho"'] & \operatorname{Cokern}\binom{F}{N} \arrow[u, "\wr"']
\end{tikzcd}$$

(2) Wieviele $\mathbf{Z}$-lineare Abbildungen gibt es von $\mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/16$ nach $\mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8$?

(3) Sei $(X \xrightarrow{f} Y) := (\mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/16 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8)$. Bestimme eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung $Y \xrightarrow{g} Z$ so, daß $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ rechtsexakt und Z direkte Summe zyklischer abelscher Gruppen ist.

(4) Wie (3), nur für $(X \xrightarrow{f} Y) := (\mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/16 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/8 \oplus \mathbf{Z}/16)$.

(5) Wie (3), nur für $(X \xrightarrow{f} Y) := (\mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8)$.

(6) Wie (3), nur für $(X \xrightarrow{f} Y) := (\mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8 \oplus \mathbf{Z}/8 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8)$.

(Hinweis: Maple, ismith.)

Aufgabe 18 (§1.2.5) Sei R ein Ring. Sei I eine Menge. Sei für jedes $i \in I$ ein R-Linksmodul M_i gegeben. Seien M ein R-Linksmodul und $(M_i \xrightarrow{\mu_i} M)_{i\in I}$ ein Tupel von R-linearen Abbildungen derart, daß für jeden R-Linksmodul X und jedes Tupel $(M_i \xrightarrow{x_i} X)$ genau eine R-lineare Abbildung $M \xrightarrow{x} X$ mit $\mu_i x = x_i$ für $i \in I$ existiert.

Kurz, es "habe M zusammen mit den μ_i die universelle Eigenschaft des Coprodukts".

Zeige, daß es einen Isomorphismus $M \xrightarrow{f} \coprod_{i\in I} M_i$ gibt mit $\mu_i f = \iota_i$ für alle $i \in I$.

Aufgabe 19 (§1.2.5) Sei R ein Ring. Seien α und β Ringisomorphismen von R nach R. Sei der R-R-Bimodul ${}_\alpha R_\beta$ via $s \cdot r * t := (s\alpha)r(t\beta)$ für $r \in R$ und $s,\, t \in R$ erklärt.

Wann sind die R-R-Bimoduln ${}_\alpha R_\beta$ und ${}_{\mathrm{id}} R_{\mathrm{id}}$ isomorph?

Aufgabe 20 (§1.2.10.1, §1.2.10.2) Sei R ein Ring. Seien α, β, γ, δ Ringisomorphismen von R nach R. Wir bilden den R-R-Bimodul ${}_\alpha R_\beta$ wie in Aufgabe 19.

(1) Finde Ringisomorphismen ε und ϑ von R nach R so, daß

$$\mathrm{Hom}_R({}_\alpha R_\beta\,,\ {}_\gamma R_\delta) \ \simeq\ {}_\varepsilon R_\vartheta$$

ist als R-R-Bimoduln.

(2) Finde Ringisomorphismen ε und ϑ von R nach R so, daß

$${}_\alpha R_\beta \underset{R}{\otimes} {}_\gamma R_\delta \ \simeq\ {}_\varepsilon R_\vartheta$$

ist als R-R-Bimoduln.

Aufgabe 21 (§1.2.10.1, §1.2.10.2) Seien R, S und T Ringe.

(1) Seien ${}_R M_S$ und ${}_R N_T$ gegeben. Zeige, daß es auf $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ eine S-T-Bimodulstruktur gibt, für welche $m(s \cdot f * t) = ((m * s)f) * t$ ist für $m \in M$, $s \in S$, $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ und $t \in T$.

(2) Seien ${}_S M_R$ und ${}_R N_T$ gegeben. Zeige, daß es auf $M \underset{R}{\otimes} N$ eine S-T-Bimodulstruktur gibt, für welche $s \cdot (m \otimes n) * t = (sm) \otimes (nt)$ ist für $s \in S$, $m \in M$, $n \in N$ und $t \in T$.

Aufgabe 22 (§1.2.10.2) Seien R, S, T, und U Ringe. Seien ${}_R X_S\,,\ {}_S Y_T\,,\ {}_T Z_U$ gegeben.

Zeige, daß folgender Isomorphismus von R-U-Bimoduln existiert.

$$\begin{array}{ccccccccc} X & \underset{S}{\otimes} & (Y & \underset{T}{\otimes} & Z) & \xrightarrow{\sim} & (X & \underset{S}{\otimes} & Y) \underset{T}{\otimes} Z \\ x & \otimes & (y & \otimes & z) & \longmapsto & (x & \otimes & y) \otimes z \end{array}$$

Aufgabe 23 (§1.2.10.2) Zeige oder widerlege.

Sei K ein Körper. Seien V und W endlichdimensionale Vektorräume über K, aufgefaßt als K-K-Bimoduln via $\lambda \cdot v * \mu := \mu\lambda v$ für $\lambda,\, \mu \in K$ und $v \in V$, analog für W.

(1) Es ist $V \times W \xrightarrow{\tau} V \underset{K}{\otimes} W$, $(v, w) \longmapsto v \otimes w$ surjektiv.

(2) Es ist $\dim_K(V \underset{K}{\otimes} W) = (\dim_K V)(\dim_K W)$.

Aufgabe 24 (§1.2.10.1, §1.2.10.2) Sei I eine Menge. Seien R, S und T Ringe. Für jedes $i \in I$ sei ein R-S-Bimodul M_i gegeben. Seien ferner ${}_R X_T$ und ${}_T Y_R$ gegeben.

Zeige folgende Isomorphismen.

(1) $\mathrm{Hom}_R(X, \prod_i M_i) \xrightarrow{\sim} \prod_i \mathrm{Hom}_R(X, M_i)$, $f \longmapsto (f\pi_i)_i$, von T-S-Bimoduln.

(2) $\mathrm{Hom}_R(\coprod_i M_i, X) \xrightarrow{\sim} \prod_i \mathrm{Hom}_R(M_i, X)$, $f \longmapsto (\iota_i f)_i$, von S-T-Bimoduln.

(3) $Y \underset{R}{\otimes} (\coprod_i M_i) \xrightarrow{\sim} \coprod_i (Y \underset{R}{\otimes} M_i)$, $y \otimes (m_i)_i \longmapsto (y \otimes m_i)_i$, von T-S-Bimoduln.

Aufgabe 25 (§1.2.8.2, §1.2.10.2) Sei R ein kommutativer Ring. Eine R-Algebra ist ein Ring A, zusammen mit einem Ringmorphismus $R \xrightarrow{\varphi} A$ so, daß $ra := (r\varphi)a = a(r\varphi) =: ar$ für alle $a \in A$ und $r \in R$. Es ist e.g. jeder Ring auf eindeutige Weise eine $\mathbf{Z}$-Algebra; cf. Beispiel 15.(2). Eine R-Algebra ist via φ auch ein R-R-Bimodul.

(1) Seien A und B zwei R-Algebren. Definiere auf $A \underset{R}{\otimes} B$ eine R-Algebrenstruktur.

(2) Seien S und T Ringe. Sei M eine abelsche Gruppe. Zeige, daß einer S-T-Bimodulstruktur auf M eine $S \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} T^\circ$-Linksmodulstruktur auf M entspricht, und umgekehrt. Kurz, ein S-T-Bimodul *ist* ein $S \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} T^\circ$-Linksmodul.

Aufgabe 26 (§1.2.10.3) Seien ${}_RM_S \xleftarrow{f} {}_RM'_S$ und ${}_RN \xrightarrow{g} {}_RN'$ und ${}_SX \xleftarrow{h} {}_SX'$ gegeben wie in Lemma 62. Zeige, daß folgendes Viereck kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
{}_R({}_RM_S \underset{S}{\otimes} {}_SX,\ {}_RN) \arrow[r, "\alpha_{X,M,N}", "\sim"'] \arrow[d, "{}_R(f \underset{S}{\otimes} h,\, g)"'] & {}_S({}_SX,\ {}_R({}_RM_S\,,\ {}_RN)) \arrow[d, "{}_S(h,\, {}_R(f,g))"] \\
{}_R({}_RM'_S \underset{S}{\otimes} {}_SX',\ {}_RN') \arrow[r, "\alpha_{X',M',N'}", "\sim"'] & {}_S({}_SX',\ {}_R({}_RM'_S\,,\ {}_RN'))
\end{tikzcd}$$

Aufgabe 27 (§1.2.10.3, §1.2.10.2)

(1) Sei $X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X''$ eine Sequenz von R-Linksmoduln, für welche

$$ {}_R(X', Z) \xleftarrow{{}_R(f,Z)} {}_R(X, Z) \xleftarrow{{}_R(g,Z)} {}_R(X'', Z) $$

eine linksexakte Sequenz von $\mathbf{Z}$-Moduln ist für jeden R-Linksmodul Z. Zeige, daß die Sequenz $X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X''$ rechtsexakt ist.

(2) Gegeben sei, ähnlich wie in Lemma 60.(1), eine kurz exakte Sequenz $M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M''$ von R-S-Bimoduln und ein S-Linksmodul N.

Zeige unter Verwendung von (1), daß die Sequenz

$$ M' \underset{S}{\otimes} N \xrightarrow{i \otimes N} M \underset{S}{\otimes} N \xrightarrow{p \otimes N} M'' \underset{S}{\otimes} N $$

von R-Linksmoduln rechtsexakt ist. (Hinweis: Lemma 62.)

Aufgabe 28 (§1.2.11.1) Sei R ein Ring. Zeige.

(1) Sei A eine Menge. Sei für jedes $\alpha \in A$ ein projektiver R-Linksmodul P_α gegeben. Dann ist $\coprod_{\alpha \in A} P_\alpha$ projektiv.

(2) Sind X und Y zwei R-Linksmoduln so, daß $X \oplus Y$ projektiv ist, dann sind auch X und Y projektiv.

(3) Ein R-Linksmodul X ist genau dann projektiv, wenn es eine Menge B und einen R-Linksmodul Y so gibt, daß $X \oplus Y \simeq \coprod_{\beta \in B} R$. Insbesondere ist also $R^{\oplus n}$ projektiv für $n \geqslant 0$.

(4) Für jeden R-Linksmodul M gibt es eine surjektive R-lineare Abbildung $P \longrightarrow M$ von einem projektiven R-Linksmodul P.

(5) Sei P ein projektiver R-Linksmodul. Sei $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} X''$ eine kurz exakte Sequenz von R-Rechtsmoduln. Zeige, daß die Sequenz $X' \underset{R}{\otimes} P \xrightarrow{i \otimes P} X \underset{R}{\otimes} P \xrightarrow{p \otimes P} X'' \underset{R}{\otimes} P$ von $\mathbf{Z}$-Moduln kurz exakt ist.

Aufgabe 29 (§1.2.11.2) Sei R ein Ring. Zeige.

(1) Sei A eine Menge. Sei für jedes $\alpha \in A$ ein injektiver R-Linksmodul I_α gegeben. Dann ist $\prod_{\alpha \in A} I_\alpha$ injektiv.

(2) Sind X und Y zwei R-Linksmoduln so, daß $X \oplus Y$ injektiv ist, dann sind auch X und Y injektiv.

Aufgabe 30 (§1.2.11.1)

Welche der folgenden $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \\ 0 & \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right)$-Linksmoduln sind projektiv? Welche injektiv?

$$\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right) \ , \ \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \ , \ \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right) / \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$$

Aufgabe 31 (§2.1.3) Zeige oder widerlege.

(1) In (Sets) ist ein Morphismus genau dann monomorph, wenn er injektiv ist.

(2) In (Rings) ist ein Morphismus genau dann epimorph, wenn er surjektiv ist.

(3) In (Sets) ist jeder Epimorphismus eine Retraktion.

(4) Sei R ein Ring. In R-Mod ist jeder Monomorphismus eine Coretraktion.

Aufgabe 32 (§2.1.3, §2.1.4, §2.2) Zeige oder widerlege.

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien. Seien $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ Morphismen in $\mathcal{C}$. Sei $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ ein Funktor.

(1) Ist fg ein Monomorphismus, so auch f.

(2) Ist fg eine Coretraktion, so auch f.

(3) Ist f eine Retraktion, so ist f epimorph.

(4) Ist f monomorph und epimorph, so ist f ein Isomorphismus.

(5) Ist f eine Coretraktion und epimorph, so ist f ein Isomorphismus.

(6) Ist f epimorph, so ist f eine Retraktion.

(7) Sind fg und gh Isomorphismen, so auch f, g und h.

(8) Ist f ein Endomorphismus und eine Retraktion, so ist f ein Automorphismus.

(9) Ist X initial, so ist $X \xrightarrow{f} Y$ monomorph.

(10) Ist f ein Monomorphismus, so auch Ff.

(11) Ist f eine Coretraktion, so auch Ff.

Aufgabe 33 (§2.1.2)
Dualisiere die Aussagen aus Aufgabe 32 (egal ob zutreffend oder nicht).

Aufgabe 34 (§2.2) Sei R ein Ring. Sei $\mathcal{C}$ die Kategorie, deren Objekte die Morphismen in R-Mod sind, und in der ein Morphismus von $(X \xrightarrow{f} Y)$ nach $(X' \xrightarrow{f'} Y')$ gegeben ist durch ein Paar $((X \xrightarrow{\xi} X'), (Y \xrightarrow{\eta} Y'))$ von Morphismen in R-Mod so, daß das Viereck

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\xi"'] & Y \arrow[d, "\eta"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd}$$

kommutiert. Komposition und Bilden von Identitäten erfolge eintragsweise.

Zeige, daß die Abbildungen, die einem Objekt $(X \xrightarrow{f} Y)$ von $\mathcal{C}$ das Objekt $C(X \xrightarrow{f} Y) := \operatorname{Cokern} f$ von R-Mod und einem Morphismus (ξ, η) von $\mathcal{C}$ den Morphismus $C(X \xrightarrow{f} Y) \xrightarrow{C(\xi,\eta)} C(X' \xrightarrow{f'} Y')$ von R-Mod mit $\rho C(\xi, \eta) = \eta\rho$ zuweisen, einen Funktor $\mathcal{C} \longrightarrow R$-Mod definieren. (Hinweis: Aufgabe 14.)

Aufgabe 35 (§2.3) Sei R ein Ring. Sei Δ_1 die teilgeordnete Menge $\{0, 1\}$. Sei $\mathcal{C}$ die in Aufgabe 34 definierte Kategorie, deren Objekte Morphismen in R-Mod sind. Sei $C : \mathcal{C} \longrightarrow R$-Mod der in loc. cit. konstruierte Funktor, der einem Objekt in $\mathcal{C}$ seinen in R-Mod gebildeten Cokern zuordnet.

(1) Begründe, daß die Kategorie $\mathcal{C}$ aus Aufgabe 34 mit $[\![\Delta_1^{\mathrm{k}}, R\text{-Mod}]\!]$ identifiziert werden kann.

(2) Sei $F : \mathcal{C} \longrightarrow R\text{-Mod}$, $(X \xrightarrow{f} Y) \longmapsto Y$, auf den Morphismen entsprechend. Zeige, daß sich die Restklassenabbildungen zu einer Transformation $F \longrightarrow C$ zusammenfügen.

Aufgabe 36 (§2.3) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Schreibe $\hat{\mathcal{C}} := [\![\mathcal{C}^\circ, (\mathrm{Sets})]\!]$.

Sei $F \in \operatorname{Ob}\hat{\mathcal{C}}$. Sei $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$.

(1) Gib eine Bijektion zwischen ${}_{\hat{\mathcal{C}}}\big({}_{\mathcal{C}}(-, X), F\big)$ und FX an.

(2) Zeige, daß $\mathcal{C} \longrightarrow \hat{\mathcal{C}}$, $X \longmapsto {}_{\mathcal{C}}(-, X)$, mit der naheliegenden Definition auf den Morphismen, ein voller und treuer Funktor ist.

Aufgabe 37 (§2.4, §2.2)

(1) Sei $M = (M, \leqslant)$ eine teilgeordnete Menge.

Zeige, daß es eine Kategorie M^{k} gibt mit $\operatorname{Ob} M^{\mathrm{k}} = M$ und $|{}_{M^{\mathrm{k}}}(a, b)| = 1$, falls $a \leqslant b$, und $|{}_{M^{\mathrm{k}}}(a, b)| = 0$ sonst, wobei $a, b \in M$.

(2) Sei $\mathcal{M}$ eine Kategorie, in welcher $|{}_{\mathcal{M}}(a, b)| \in \{0, 1\}$ für alle $a, b \in \operatorname{Ob}\mathcal{M}$ und in welcher alle Isoklassen einelementig sind.

Zeige, daß $\mathcal{M}$ derart eine teilgeordnete Menge $\mathcal{M}^{\mathrm{t}}$ zugeordnet werden kann, daß $\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}^{\mathrm{tk}}$.

Zeige, daß $M = M^{\mathrm{kt}}$ für eine teilgeordnete Menge M.

(3) Seien $M = (M, \leqslant)$ und $N = (N, \leqslant)$ teilgeordnete Mengen.

Gib eine Bijektion von der Menge der monotonen Abbildungen von M nach N in die Menge der Funktoren von M^{k} nach N^{k} an.

Aufgabe 38 (§3.1) Zeige, daß die Kategorie (Rel) der Mengen mit Relationen als Morphismen ein Nullobjekt hat, sowie zwar (Add 1), nicht aber (Add 2) erfüllt.

Aufgabe 39 (§3.1) Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie.

(1) Sei $m \geqslant 0$. Seien $X_1, \ldots, X_m \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Zeige, daß $(X_1, \ldots, X_m)$ eine direkte Summe besitzt. (Hinweis: Induktion.)

(2) Seien $\ell, m, n \geqslant 0$. Seien $X_i \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ für $i \in [1, \ell]$, $Y_j \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ für $j \in [1, m]$ und $Z_k \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ für $k \in [1, n]$. Seien $\bigoplus_{i\in[1,\ell]} X_i \xrightarrow{(f_{i,j})_{i,j}} \bigoplus_{j\in[1,m]} Y_j \xrightarrow{(g_{j,k})_{j,k}} \bigoplus_{k\in[1,n]} Z_k$ in $\mathcal{A}$ gegeben. Zeige, daß $(f_{i,j})_{i,j}\,(g_{j,k})_{j,k} = \big(\sum_{j\in[1,m]} f_{i,j} g_{j,k}\big)_{i,k}$.

(3) Seien $k,\, \ell \geqslant 0$. Seien $f_1\,,\, \ldots\,,\, f_{k+\ell} : X \longrightarrow Y$ in $\mathcal{A}$. Zeige, daß $(\sum_{i\in[1,k]} f_i) \;+\; (\sum_{i\in[1,\,\ell]} f_{i-k}) \;=\; \sum_{i\in[1,k+\ell]} f_i$.

(4) Seien $k,\, \ell \geqslant 0$. Seien $f_i : X \longrightarrow Y$ für $i \in [1,k]$ und $g_j : Y \longrightarrow Z$ für $j \in [1,\ell]$ in $\mathcal{A}$. Zeige, daß $(\sum_{i\in[1,k]} f_i)(\sum_{j\in[1,\ell]} g_j) \;=\; \sum_{i\in[1,k]} \sum_{j\in[1,\ell]} f_i g_j$.

(5) Seien $X,\, Y \;\in\; \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Zeige, daß $\big({}_{\mathcal{A}}(X,Y),\, +\big)$ eine abelsche Gruppe ist, mit neutralem Element $0 = 0_{X,Y}$.

(6) Seien $m,\, n \geqslant 0$. Seien $X_i \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ für $i \in [1,m]$ und $Y_j \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ für $j \in [1,n]$. Seien $\bigoplus_{i\in[1,m]} X_i \underset{(f'_{i,j})_{i,j}}{\overset{(f_{i,j})_{i,j}}{\rightrightarrows}} \bigoplus_{j\in[1,n]} Y_j$ in $\mathcal{A}$. Zeige, daß $(f_{i,j})_{i,j} + (f'_{i,j})_{i,j} = (f_{i,j} + f'_{i,j})_{i,j}$.

(7) Seien $X,\, Y,\, Z \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Gib einen Isomorphismus von $(X \oplus Y) \oplus Z$ nach $X \oplus Y \oplus Z$ in Matrixform an.

Aufgabe 40 (§3.1) Zeige oder widerlege.

Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie. Sei $X \oplus Y \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)} X' \oplus Y'$ aus $\mathcal{A}$.

(1) Sei $b = 0$. Es ist $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ genau dann ein Isomorphismus, wenn a und d Isomorphismen sind.

(2) Es ist $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ genau dann ein Isomorphismus, wenn a und d Isomorphismen sind.

(3) Falls $X = X'$ und jede Retraktion von X nach X ein Automorphismus ist, dann ist $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ genau dann ein Isomorphismus, wenn a und d Isomorphismen sind.

Aufgabe 41 (§3.1, §1.2.8.2) Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie. Seien $X,\, Y \;\in\; \operatorname{Ob}\mathcal{A}$.

Zeige, daß jeweils in einem geeigneten Sinn $\operatorname{End}_{\mathcal{A}}(X)$ ein Ring und $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)$ ein $\operatorname{End}_{\mathcal{A}}(X)$-$\operatorname{End}_{\mathcal{A}}(Y)$-Bimodul ist.

Aufgabe 42 (§3.2)

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ additive Kategorien. Sei $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ein Funktor mit $F0 \simeq 0$.

Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen.

(1) Es ist F additiv.

(2) Für $X_1\,,\, X_2 \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ erfüllt $F(X_1 \oplus X_2)$ zusammen mit den Morphismen $F(X_1 \oplus X_2) \xrightarrow{F\pi_1} X_1$ und $F(X_1 \oplus X_2) \xrightarrow{F\pi_2} X_2$ das Axiom (Sum 1).

(3) Für $X_1,\, X_2 \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ erfüllt $F(X_1 \oplus X_2)$ zusammen mit den Morphismen $FX_1 \xrightarrow{F\iota_1} F(X_1 \oplus X_2)$ und $FX_2 \xrightarrow{F\iota_2} F(X_1 \oplus X_2)$ das Axiom (Sum 2).

Aufgabe 43 (§3.2) Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ additive Kategorien. Seien $\mathcal{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}} \mathcal{B}$ additive Funktoren. Sei $F \xrightarrow{\alpha} G$ eine Transformation. Seien $X, Y, Z \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ so gegeben, daß $Z \simeq X \oplus Y$ ist in $\mathcal{A}$.

Zeige, daß αZ genau dann ein Isomorphismus ist, wenn αX und αY Isomorphismen sind.

Aufgabe 44 (§3.3) Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie und $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{A}$ eine volle additive Teilkategorie. Sei $\mathcal{B}$ eine additive Kategorie. Zeige.

(1) Es ist $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ eine additive Kategorie. Es ist $\mathcal{A} \xrightarrow{R} \mathcal{A}/\mathcal{N}$ ein additiver Funktor.

(2) Sei $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ ein additiver Funktor so, daß $FX \simeq 0$ ist für alle $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Dann gibt es genau einen additiven Funktor $\mathcal{A}/\mathcal{N} \xrightarrow{\bar{F}} \mathcal{B}$ mit $\bar{F} \circ R = F$.

(3) Seien $\mathcal{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}} \mathcal{B}$ additive Funktoren so, daß $FX \simeq 0$ und $GX \simeq 0$ für alle $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Sei $F \xrightarrow{a} G$ eine Transformation. Dann gibt es genau eine Transformation $\bar{F} \xrightarrow{\bar{a}} \bar{G}$ so, daß $\bar{a}RX = aX$ für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$.

Aufgabe 45 (§1.2.9, §2.4) Sei $k \geqslant 2$. Sei $\mathbf{Z}/k$-mod die volle Teilkategorie der endlichen $\mathbf{Z}/k$-Moduln in $\mathbf{Z}/k$-Mod $\subseteq \mathbf{Z}$-Mod; cf. §1.2.7 ([10]).

(1) Zeige, daß der Funktor $F := {}_{\mathbf{Z}}(-, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) : \mathbf{Z}\text{-Mod}^\circ \longrightarrow \mathbf{Z}\text{-Mod}$ zu einer Äquivalenz $F_k : \mathbf{Z}/k\text{-mod}^\circ \longrightarrow \mathbf{Z}/k\text{-mod}$ einschränkt. Zeige hierzu, daß es eine Transformation $\mathrm{id} \xrightarrow{\tau} F^2$ gibt, für welche τX ein Isomorphismus ist, wann immer $X \in \operatorname{Ob}(\mathbf{Z}/k\text{-mod})$.

(2) Sei $\mathbf{Z}/\ell \xrightarrow{s} \mathbf{Z}/m$ in $\mathbf{Z}/k$-mod, wobei $s \in \mathbf{Z}$. Ersetze $F(\mathbf{Z}/\ell \xrightarrow{s} \mathbf{Z}/m)$ isomorph durch einen Morphismus zwischen zyklischen abelschen Gruppen.

(3) Sei $\bigoplus_{i\in[1,p]} \mathbf{Z}/\ell_i \xrightarrow{(s_{i,j})_{i,j}} \bigoplus_{j\in[1,q]} \mathbf{Z}/m_j$ in $\mathbf{Z}/k$-mod, wobei $s_{i,j} \in \mathbf{Z}$. Ersetze sein Bild unter F isomorph durch einen Morphismus zwischen direkten Summen zyklischer abelscher Gruppen.

(4) Bestimme in Aufgabe 17.(3) eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung $W \xrightarrow{h} X$ so, daß $W \xrightarrow{h} X \xrightarrow{f} Y$ linksexakt und W direkte Summe zyklischer abelscher Gruppen ist. (Bei der erforderlichen Cokern-Berechnung genügt die Angabe des Ergebnisses unter Verweis auf die Methode aus Aufgabe 17.)

(5) Wie (4), nur in Aufgabe 17.(5).

[10] Allgemeiner schreibt man R-mod für die Kategorie der endlich erzeugten Linksmoduln über einem Ring R; cf. Aufgabe 13.

Aufgabe 46 (§2.4, §4.2) Zeige oder widerlege.

Sei $\mathbf{Z}$-free die volle additive Teilkategorie von $\mathbf{Z}$-Mod der $\mathbf{Z}$-Moduln der Form $\mathbf{Z}^{\oplus k}$ für ein $k \geqslant 0$.

(1) Es ist $\mathbf{Z}\text{-free} \simeq \mathbf{Z}\text{-free}^{\circ}$.

(2) In $\mathbf{Z}$-free hat jeder Morphismus einen Kern und einen Cokern.

(3) In $\mathbf{Z}$-free ist jeder Monomorphismus ein Kern.

(4) In $\mathbf{Z}$-free ist jeder Epimorphismus ein Cokern.

(5) Es ist $\mathbf{Z}$-free eine abelsche Kategorie.

Aufgabe 47 (§4.3) Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Sei darin $X \xrightarrow{f} Y$ gegeben. Sei $K \xrightarrow{i} X$ ein Kern von f. Sei $Y \xrightarrow{r} C$ ein Cokern von f. Sei $X \xrightarrow{r'} C'$ ein Cokern von i. Sei $K' \xrightarrow{i'} Y$ ein Kern von r. Zeige.

(1) Falls f monomorph ist, dann ist f ein Kern von r.

(2) Falls f monomorph und epimorph ist, dann ist f ein Isomorphismus.

(3) Es gibt ein kommutatives Diagramm wie folgt.

$$\begin{tikzcd}
 & & C' \arrow[d, "\tilde{f}", "\wr"'] & & \\
K \arrow[r, "i", "\bullet"'] & X \arrow[ur, "r'", "\times"'] \arrow[rr, "f"] & K' \arrow[rr, "r", "|"'] & Y \arrow[r] & C \\
 & & & K' \arrow[ur, "i'", "\bullet"'] &
\end{tikzcd}$$

(Hinweis: Warum genügt es, $\mathrm{C}_{\tilde{f}} \simeq 0$ zu zeigen?)

Aufgabe 48 (§4.2) Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie.

Sei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ eine volle additive Teilkategorie.

Für jeden Morphismus in $\mathcal{B}$ sei ein in $\mathcal{A}$ genommener Kern und ein in $\mathcal{A}$ genommener Cokern bereits in $\mathcal{B}$ enthalten.

Zeige, daß $\mathcal{B}$ abelsch ist.

Aufgabe 49 (§4.4) Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Sei $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$.

Zeige, daß der Funktor ${}_{\mathcal{A}}(X, -) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{Z}\text{-Mod}$ linksexakt ist.

Aufgabe 50 (§3.1, §4.2) Sei $\mathcal{D}$ eine Kategorie. Zeige.

(1) Ist $\mathcal{A}$ additiv, so auch $[\![\mathcal{D}, \mathcal{A}]\!]$ und $\mathrm{C}(\mathcal{A})$.

(2) Ist $\mathcal{A}$ abelsch, so auch $[\![\mathcal{D}, \mathcal{A}]\!]$ und $\mathrm{C}(\mathcal{A})$.

Aufgabe 51 (§4.4) Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie, in der sich das folgende abspiele. Zeige.

(1) Seien $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} X''$ und $Y' \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{s} Y''$ Sequenzen. Sei (f', f, f'') ein Morphismus von Sequenzen von $Y' \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{s} Y''$ nach $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} X''$, i.e. sei $f'i = jf$ und $fr = sf''$. Sei (g', g, g'') ein Morphismus von Sequenzen in umgekehrter Richtung, i.e. sei $g'j = ig$ und $gs = rg''$. Sei $f'g' = 1$, $fg = 1$ und $f''g'' = 1$. Ist (i, r) kurz exakt, so auch (j, s).

(2) Sei $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} X''$ eine kurz exakte Sequenz, und sei i eine Coretraktion. Dann ist diese kurz exakte Sequenz isomorph zu $X' \xrightarrow{(1\,0)} X' \oplus X'' \xrightarrow{\binom{0}{1}} X''$ vermöge eines Isomorphismus der Form $(1_{X'}, a, 1_{X''})$.

(3) Sei $V \xrightarrow{m} U$ eine Coretraktion in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Ist U azyklisch, so auch V. Ist U split azyklisch, so auch V.

(4) Seien $V, V' \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}(\mathcal{A})$. Zeige, daß $V \oplus V'$ genau dann split azyklisch ist, wenn V und V' dies sind.

Aufgabe 52 (§4.5.2) Zeige oder widerlege.

Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Sei darin folgendes kommutative Diagramm gegeben.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "y"] & Z \arrow[d, "z"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' \end{tikzcd}$$

(1) Sind (X, X', Y, Y') und (Y, Y', Z, Z') Pullbacks, dann auch (X, X', Z, Z').

(2) Ist (X, X', Z, Z') ein Pullback, dann auch (X, X', Y, Y').

(3) Sind (X, X', Z, Z') und (Y, Y', Z, Z') Pullbacks, dann auch (X, X', Y, Y').

(4) Sind (X, X', Z, Z') und (X, X', Y, Y') Pullbacks, dann auch (Y, Y', Z, Z').

(5) Ist (X, X', Z, Z') ein Pullback und (X, X', Y, Y') ein Pushout, dann ist (X, X', Y, Y') ein Quadrat und (Y, Y', Z, Z') ein Pullback.

(6) Ist (X, X', Y, Y') ein Pullback und f epimorph, dann auch f'.

(7) Ist x ein Isomorphismus und y monomorph, dann ist (X, X', Y, Y') ein Pullback.

Aufgabe 53 (§4.4, §4.5.3) Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien.

Sei $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ ein Funktor, der kurz exakte Sequenzen in kurz exakte Sequenzen abbildet.

Zeige, daß F exakt ist. (Hinweis: Additivität via split kurz exakter Sequenzen.)

Aufgabe 54 (§4.6) Sei $k \geqslant 2$ eine Primpotenz.

(1) Zeige, daß $\mathbf{Z}/k$-mod eine abelsche Kategorie ist.
(Hinweis: $\mathbf{Z}/k$-Mod ist als abelsch bekannt. Es ist $\mathbf{Z}/k\text{-mod} \simeq \mathbf{Z}/k\text{-mod}^\circ$.)

(2) Zeige, daß für $X \in \operatorname{Ob} \mathbf{Z}/k$-mod folgende Aussagen äquivalent sind.

  (i) Es ist X injektiv.
  (ii) Es ist X projektiv.
  (iii) Es ist X isomorph zu $(\mathbf{Z}/k)^{\oplus n}$ für ein $n \geqslant 0$.

(3) Ist $\mathbf{Z}/k$ injektiv oder projektiv in $\mathbf{Z}$-Mod ?

(4) Zeige, daß $\mathbf{Z}/k$-mod genügend Projektive und genügend Injektive hat.

Aufgabe 55 (§5.2) Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Zeige.

(1) Sei $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Zeige, daß das Bild von f in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ genau dann verschwindet, wenn es ein Tupel $(X^i \xrightarrow{h^i} Y^{i-1})_{i\in\mathbf{Z}}$ von Morphismen in $\mathcal{A}$ so gibt, daß $h^i d + dh^{i+1} = f^i$ für alle $i \in \mathbf{Z}$. Diesenfalls heißt f auch *nullhomotop* und $(h^i)_{i\in\mathbf{Z}}$ eine *Homotopie*.

(2) Sei $X \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}(\mathcal{A})$. Zeige, daß X genau dann in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ isomorph zu 0 ist, wenn X split azyklisch ist.

Aufgabe 56 (§4.4) Seien $\mathcal{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{B}$ Funktoren zwischen Kategorien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

(1) Zeige die Äquivalenz von (i) und (ii).

  (i) Es sind ${}_{\mathcal{B}}(F(-),=)$ und ${}_{\mathcal{A}}(-,G(=))$ isomorphe Funktoren von $\mathcal{A}^\circ \times \mathcal{B}$ nach (Sets).

  (ii) Es gibt Transformationen $\mathrm{id}_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\varepsilon} G \circ F$ und $F \circ G \xrightarrow{\eta} \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ (*Coeinheit*) mit $(F\varepsilon X)(\eta F X) = 1_{FX}$ für $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$ und $(\varepsilon G Y)(G\eta Y) = 1_{GY}$ für $Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{B}$.

  Gelten (i, ii), so heißt F *linksadjungiert* zu G, und G *rechtsadjungiert* zu F, geschrieben $F \dashv G$.
  Es heißt ε eine *Einheit* und η eine *Coeinheit* dieser Adjunktion.

(2) Sei $G \circ F \simeq 1$ und $F \circ G \simeq 1$. Zeige, daß $F \dashv G$.

(3) Seien G und $\tilde{G}$ rechtsadjungiert zu F. Zeige, daß $G \simeq \tilde{G}$.

(4) Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ additiv. Sei $F \dashv G$. Zeige, daß F additiv ist.

(5) Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abelsch. Sei $F \dashv G$. Zeige, daß F rechtsexakt ist.

Cf. auch Lemma 62.

Aufgabe 57 (§4.2, Aufgabe 56)

Seien $\mathcal{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{B}$ Funktoren zwischen Kategorien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$. Sei $F \dashv G$; cf. Aufgabe 56.

Wir erinnern an die Einheit $\mathrm{id}_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\varepsilon} G \circ F$ und die Coeinheit $F \circ G \xrightarrow{\eta} \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$; cf. Aufgabe 56.(1.ii).

Zeige.

(1) Ist F voll, so ist für $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$ die Einheit εX eine Retraktion, sowie $\varepsilon GFX = GF\varepsilon X$. (Hinweis: $Fa = \eta FX$.)

(2) Ist F voll und treu, so ist ε eine Isotransformation.

(3) Ist F voll und treu, $\mathcal{A}$ additiv und $\mathcal{B}$ abelsch, und respektiert G Cokerne ([11]), dann ist $\mathcal{A}$ abelsch, F rechtsexakt und G exakt.

Aufgabe 58 (§4.2, Aufgaben 56 und 57)

(1) Seien $\mathcal{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{B}$ Funktoren zwischen Kategorien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$. Sei $F \dashv G$; cf. Aufgabe 56. Seien $\eta, \tilde{\eta} : F \circ G \longrightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ Coeinheiten zu dieser Adjunktion. Zeige, daß es einen Automorphismus $G \xrightarrow[\sim]{u} G$ so gibt, daß $Fu \cdot \tilde{\eta} = \eta$ ist.

(2) Finde abelsche Kategorien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ und einen vollen, treuen und exakten Funktor $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ so, daß F einen Linksadjungierten und einen Rechtsadjungierten hat, die beide nicht exakt sind.

(3) Finde eine additive Kategorie $\mathcal{A}$, in welcher jeder Morphismus einen Kern und einen Cokern hat, eine abelsche Kategorie $\mathcal{B}$, einen vollen und treuen Funktor $\mathcal{A} \xrightarrow{G} \mathcal{B}$, welcher einen Linksadjungierten $\mathcal{A} \xleftarrow{F} \mathcal{B}$ hat, der Monomorphismen respektiert, derart, daß $\mathcal{A}$ nicht abelsch ist, F nicht Kerne respektiert und G nicht Cokerne respektiert.

Aufgabe 59 (§5.4.4) Sei

$$\begin{tikzcd}
(X', X, X'') \arrow[r, "{(f', f, f'')}"] \arrow[d, "{(x', x, x'')}"'] & (Y', Y, Y'') \arrow[d, "{(y', y, y'')}"] \\
(\tilde{X}', \tilde{X}, \tilde{X}'') \arrow[r, "{(\tilde{f}', \tilde{f}, \tilde{f}'')}"'] & (\tilde{Y}', \tilde{Y}, \tilde{Y}'')
\end{tikzcd}$$

[11] D.h. für alle Diagramme $Y' \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{p} Y''$ in $\mathcal{B}$ mit p Cokern zu i ist auch Gp ein Cokern zu Gi.

ein kommutatives Viereck von Sequenzen. Sei (X', X, X'') rechts- und (Y', Y, Y'') linksexakt. Sei $(\tilde{X}', \tilde{X}, \tilde{X}'')$ rechts- und $(\tilde{Y}', \tilde{Y}, \tilde{Y}'')$ linksexakt. Verwende bzgl. (f', f, f'') alle Bezeichungen aus Lemma 136 und dessen Beweis; bzgl. $(\tilde{f}', \tilde{f}, \tilde{f}'')$ entsprechend. Bemerkung 124.(2) gibt uns Morphismen k' mit $k'\tilde{i}' = i'x'$, und k mit $k\tilde{i} = ix$, und k'' mit $k''\tilde{i}'' = i''x''$, und c' mit $r'c' = y'\tilde{r}'$, und c mit $rc = y\tilde{r}$, und c'' mit $r''c'' = y''\tilde{r}''$.

Zeige die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
K' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "k'"'] & K \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "k"'] & K'' \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "k''"'] & C' \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "c'"] & C \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "c"] & C'' \arrow[d, "c''"] \\
\tilde{K}' \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] & \tilde{K} \arrow[r, "\tilde{\beta}"] & \tilde{K}'' \arrow[r, "\tilde{\gamma}"] & \tilde{C}' \arrow[r, "\tilde{\delta}"] & \tilde{C} \arrow[r, "\tilde{\varepsilon}"] & \tilde{C}''
\end{tikzcd}$$

Folgere, daß γ bei fester Wahl von i'' und r' nicht von den während der Konstruktion getroffenen sonstigen Wahlen abhängt.

Aufgabe 60 (§5.4.2, §3.2) Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Sei $k \in \mathbf{Z}$.

Zeige, daß $\mathrm{H}^k : \mathrm{C}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$ ein additiver Funktor ist.

Aufgabe 61 (§5.4.4) Zeige oder widerlege.

Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie.

(1) Sei $X' \overset{i}{\bullet\!\!\to} X \overset{r}{\to\!\!\!\!\!\!+} X''$ eine kurz exakte Sequenz in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Sind zwei der Komplexe X', X, X'' azyklisch, so auch der dritte.

(2) Sei $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Sind X und Y azyklisch, so auch I_f .

Aufgabe 62 (§5.5, §5.6)

(1) Zu $\mathbf{Z}/4 \xrightarrow{4} \mathbf{Z}/8$ ist in $\mathbf{Z}/64$-mod eine projektive und eine injektive Auflösung anzugeben.

(2) Zu $\left(\begin{pmatrix}\mathbf{Q}\\ \mathbf{Q}\\ 0\end{pmatrix} / \begin{pmatrix}\mathbf{Q}\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix}\mathbf{Q}\\ \mathbf{Q}\\ \mathbf{Q}\end{pmatrix} / \begin{pmatrix}\mathbf{Q}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\ ,\ x + \begin{pmatrix}\mathbf{Q}\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \longmapsto x + \begin{pmatrix}\mathbf{Q}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\right)$ ist in $\begin{pmatrix}\mathbf{Q} & \mathbf{Q} & \mathbf{Q}\\ 0 & \mathbf{Q} & \mathbf{Q}\\ 0 & 0 & \mathbf{Q}\end{pmatrix}$-Mod eine projektive Auflösung anzugeben.

(3) Zu $\mathbf{Z}/2 \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/4 \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/2$ ist in $\mathbf{Z}/8$-mod eine injektive Hufeisenauflösung anzugeben.

Aufgabe 63 (§6.1.2.2) Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Sei

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[r, "r"] & X'' \arrow[d, "f''"] \\
\tilde{X}' \arrow[r, "\tilde{i}"] & \tilde{X} \arrow[r, "\tilde{r}"] & \tilde{X}''
\end{tikzcd}$$

ein Diagramm azyklischer Komplexe in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$, in welchem (i, r) und $(\tilde{i}, \tilde{r})$ kurz exakt seien, (i^k, r^k) und $(\tilde{i}^k, \tilde{r}^k)$ split kurz exakt für $k \geqslant 0$, und X'^k, X^k, X''^k, $\tilde{X}'^k$, $\tilde{X}^k$, $\tilde{X}''^k$ null für $k \leqslant -2$ und injektiv für $k \geqslant 0$. Sei ferner ein $X^{-1} \xrightarrow{f^{-1}} \tilde{X}^{-1}$ mit $i^{-1}f^{-1} = f'^{-1}\tilde{i}^{-1}$ und $f^{-1}\tilde{r}^{-1} = r^{-1}f''^{-1}$ gegeben (Position -1, keine Inversion).

Zeige, daß $X^{-1} \xrightarrow{f^{-1}} \tilde{X}^{-1}$ zu $X \xrightarrow{f} \tilde{X}$ mit $if = f'\tilde{i}$ und $f\tilde{r} = rf''$ ergänzt werden kann.

Cf. §7.1.1.

Aufgabe 64 (§5.4.4) Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Definiere für $X \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}(\mathcal{A})$ den Komplex $X[1]$ durch $(X[1]^k \xrightarrow{d^k_{X[1]}} X[1]^{k+1}) := (X^{k+1} \xrightarrow{-d^{k+1}_X} X^{k+2})$ für $k \in \mathbf{Z}$.

Sei $X' \overset{i}{\bullet\!\!\to} X \overset{r}{\bullet\!\!\to} X''$ eine punktweise split kurz exakte Sequenz von Komplexen. Zeige, daß es einen Morphismus $X'' \longrightarrow X'[1]$ so gibt, daß $(\mathrm{H}^k X'' \xrightarrow{\partial^k_{(i,r)}} \mathrm{H}^{k+1} X') = \mathrm{H}^k(X'' \longrightarrow X'[1])$ ist für $k \in \mathbf{Z}$.

Aufgabe 65 (§4.5.1, §4.5.3, Aufgabe 64) ([12]) Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie.

Sei $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ in $\mathcal{A}$ gegeben.

(1) Zeige, daß

$$\begin{tikzcd} X \oplus Y \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} f & 0 \\ 1 & g \end{pmatrix}"'] & X \arrow[d, "fg"] \\ Y \oplus Z \arrow[r, "\begin{pmatrix} g \\ -1 \end{pmatrix}"'] & Z \end{tikzcd}$$

ein Quadrat ist.

(2) Folgere aus einer Anwendung des Schlangenlemma 136 auf einen Morphismus split kurz exakter Sequenzen von $(X, X \oplus Y, Y)$ nach $(Y, Y \oplus Z, Z)$ unter Verwendung von (1) das Umfangssequenzlemma 132 für $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ (mit den Standardkernen und -cokernen).

Aufgabe 66 (§6.1.1, §6.1.2.2)

(1) Sei $\mathcal{A} := \mathbf{Z}/64$-mod. Berechne $\operatorname{Ext}^2_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/16, \mathbf{Z}/4) \xrightarrow{\operatorname{Ext}^2_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/16,4)} \operatorname{Ext}^2_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/16, \mathbf{Z}/8)$.

(2) Berechne $\operatorname{Tor}_3^{\mathbf{Z}/64}(\mathbf{Z}/8, \mathbf{Z}/4) \xrightarrow{\operatorname{Tor}_3^{\mathbf{Z}/64}(\mathbf{Z}/8,4)} \operatorname{Tor}_3^{\mathbf{Z}/64}(\mathbf{Z}/8, \mathbf{Z}/8)$.

(3) Sei $R := \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \\ 0 & \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \\ 0 & 0 & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$. Sei $X := (\mathbf{Q}\ \mathbf{Q}\ \mathbf{Q}) \,/\, (0\ \mathbf{Q}\ \mathbf{Q}) \in \operatorname{Ob} \operatorname{Mod}\text{-}R$.
Sei $Y := \begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \\ 0 \end{pmatrix} \,/\, \begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ob} R\text{-Mod}$. Berechne $\operatorname{Tor}_k^R(X, Y)$ für $k \geqslant 0$.

(4) Sei $\mathcal{A} = \mathbf{Z}/8$-mod. Berechne die lang exakte $\operatorname{Ext}^*_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/4, -)$-Sequenz auf $\mathbf{Z}/2 \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/4 \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/2$.

(Hinweis: Aufgabe 62.)

[12] Diese Aufgabe stammt von Carsten Dietzel.

Aufgabe 67 (§4.5.1) Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Sei $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$.

Es gebe keine Kette $X =: X_0 \leftarrow\!\!\bullet\!\!- X_1 \leftarrow\!\!\bullet\!\!- X_2 \leftarrow\!\!\bullet\!\!- \cdots$ aus Monomorphismen, die keine Isomorphismen sind.

Es gebe keine Kette $X =: X_0 \twoheadrightarrow X_1 \twoheadrightarrow X_2 \twoheadrightarrow \cdots$ aus Epimorphismen, die keine Isomorphismen sind.

Sei $X \xrightarrow{f} X$ ein Endomorphismus. Zeige, daß es ein $n \geqslant 1$ gibt mit $\mathrm{K}_{f^n} \oplus \mathrm{I}_{f^n} \xrightarrow[\sim]{\begin{pmatrix} \iota_{f^n} \\ (f^n)^{\cdot} \end{pmatrix}} X$. (Fittinglemma; Hinweis: Umfangssequenzlemma auf $f^{2k} = f^k f^k$; cf. Lemma 132.)

Aufgabe 68 (§6.3.1) Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien. Sei $\mathcal{A} \xrightarrow{G} \mathcal{B}$ rechtsexakt.

(1) Sei $k \in \mathbf{Z}$. Bestimme eine Transformation von $G \circ \mathrm{H}^k$ nach $\mathrm{H}^k \circ \mathrm{C}(G)$.

(2) Sei $X \xrightarrow{f} Y$ ein Quasiisomorphismus in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Ist G exakt, so zeige, daß auch $\mathrm{C}(G)X \xrightarrow{\mathrm{C}(G)f} \mathrm{C}(G)Y$ ein Quasiisomorphismus ist.

Aufgabe 69 (§6.3.3) Seien $\mathcal{A}$, $\tilde{\mathcal{A}}$ und $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien. Haben $\mathcal{A}$ und $\tilde{\mathcal{A}}$ genügend Injektive. Sei $F : \mathcal{A} \times \tilde{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{B}$ ein biadditiver Funktor so, daß $F(J, -)$ exakt ist für $J \in \operatorname{Ob}\operatorname{Inj}\mathcal{A}$ und $F(-, \tilde{J})$ exakt ist für $\tilde{J} \in \operatorname{Ob}\operatorname{Inj}\tilde{\mathcal{A}}$.

Sei $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Sei $I \in \mathrm{C}^{\mathrm{res}}(\operatorname{Inj}\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{C}(\mathcal{A})$ eine injektive Auflösung von X.

Sei

$$Y' \overset{i}{\rightarrowtail} Y \overset{r}{\twoheadrightarrow} Y''$$

eine kurz exakte Sequenz in $\tilde{\mathcal{A}}$.

Zeige, daß die lang exakte $\mathrm{R}^* F(X, -)$-Sequenz auf (i, r) isomorph ist zur lang exakten Homologiesequenz auf der kurz exakten Sequenz

$$F(I, Y') \xrightarrow{F(I,i)} F(I, Y) \xrightarrow{F(I,r)} F(I, Y'')$$

in $\mathrm{C}(\mathcal{B})$, welche an Position $k \in \mathbf{Z}$ durch $F(I_k\,,\,Y') \xrightarrow{F(I_k\,,\,i)} F(I_k\,,\,Y) \xrightarrow{F(I_k\,,\,r)} F(I_k\,,\,Y'')$ gegeben ist.

Aufgabe 70 (§4.5.3, Aufgabe 59) Sei R ein Ring.

Sei $(X', X, X'') \xrightarrow{(f', f, f'')} (Y', Y, Y'')$ ein Morphismus von einer rechts- in eine linksexakte Sequenz in R-Mod.

Sei $x'' \in \operatorname{Kern} f''$. Gib eine Beschreibung des Bildes von x'' unter dem Konnektor

$$\operatorname{Kern} f'' \longrightarrow \operatorname{Cokern} f' = Y' / \operatorname{Im} f' \;;$$

cf. Lemma 136.

Aufgabe 71 (§7.2.1) Sei $\mathbf{Z}$-mod $\subseteq$ $\mathbf{Z}$-Mod die volle Teilkategorie der endlich erzeugten abelschen Gruppen; cf. Aufgabe 13.

Zeige, daß $\mathbf{Z}$-mod eine dicke Teilkategorie von $\mathbf{Z}$-Mod ist.

Aufgabe 72 (§7.2.3, Aufgaben 56 und 57, §2.4)
Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien.

Seien $\mathcal{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{B}$ Funktoren. Sei F voll und treu. Sei $F \dashv G$. Cf. Aufgaben 56 und 57.
Bilde G Epimorphismen in Epimorphismen ab.

Sei $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{B}$ die volle Teilkategorie, die durch

$$\operatorname{Ob}\mathcal{K} \;:=\; \{\, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{B} \;:\; GY \simeq 0 \,\}$$

definiert ist.

Zeige.

(1) Es ist $\mathcal{K}$ eine dicke Teilkategorie von $\mathcal{B}$. Es gibt genau einen exakten Funktor $\mathcal{B}/\!\!/\mathcal{K} \xrightarrow{\bar{\bar{G}}} \mathcal{A}$ mit $\bar{\bar{G}} \circ L = G$; cf. Definition 217.

(2) Der Funktor $\bar{\bar{G}}$ aus (1) ist eine Äquivalenz.

Aufgabe 73 (§4.2, §4.4, §4.1, Aufgabe 47)
Sei $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ ein exakter Funktor zwischen abelschen Kategorien.

Es folge für jedes Objekt X von $\mathcal{A}$ aus $FX \simeq 0$, daß $X \simeq 0$ ist.

Zeige, daß F treu ist.

Aufgabe 74 (§1.2.11.1) Zeige, daß $\mathbf{Q}$ kein projektiver $\mathbf{Z}$-Modul ist.

Aufgabe 75 (§3.3, §7.2.3) Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie. Sei $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{A}$ eine volle additive Teilkategorie. Sei an den Restklassenfunktor $\mathcal{A} \xrightarrow{R} \mathcal{A}/\mathcal{N}$ erinnert; cf. Definition 114.

Sei $\mathcal{B}$ eine Kategorie, nicht notwendig additiv. Sei $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ ein Funktor. Für $f \in \operatorname{Mor}\mathcal{A}$ gelte, daß aus Rf isomorph auch Ff isomorph folgt.

Zeige, daß genau ein Funktor $\mathcal{A}/\mathcal{N} \xrightarrow{\hat{F}} \mathcal{B}$ mit $\hat{F} \circ R = F$ existiert.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "R"'] & \mathcal{B} \\
\mathcal{A}/\mathcal{N} \arrow[ur, "\hat{F}"'] &
\end{tikzcd}$$

Aufgabe 76 (§4.5.2, §5.4.1, §5.4.4)

Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Sei folgendes kommutative Diagramm in $\mathcal{A}$ gegeben.

$$\begin{tikzcd}
Z' \arrow[r, "z'", "\bullet"{marking}] & Z \arrow[r, "z''", "|"{marking}] & Z'' \\
Y' \arrow[u, "g'", "|"{marking}] \arrow[r, "y'", "\bullet"{marking}] & Y \arrow[u, "g"'] \arrow[r, "y''", "|"{marking}] & Y'' \arrow[u, "g''", "|"{marking}] \\
X' \arrow[u, "f'"', "\bullet"{marking}] \arrow[r, "x'", "\bullet"{marking}] & X \arrow[u, "f"'] \arrow[r, "x''", "|"{marking}] & X'' \arrow[u, "f''"', "\bullet"{marking}]
\end{tikzcd}$$

Seien darin (x', x''), (y', y''), (z', z''), (f', g') und (f'', g'') kurz exakt sowie $fg = 0$.

Zeige.

(1) Es ist (f, g) kurz exakt.

(2) Die Sequenz

$$X' \xrightarrow{x'f} Y \xrightarrow{(g\, y'')} Z \oplus Y''$$

ist linksexakt.

(3) Ist nun vielmehr nur das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Y' \arrow[r, "y'", "\bullet"{marking}] & Y \arrow[r, "y''", "|"{marking}] & Y'' \\
X' \arrow[u, "f'"', "\bullet"{marking}] \arrow[r, "x'", "\bullet"{marking}] & X \arrow[u, "f"', "\bullet"{marking}] &
\end{tikzcd}$$

gegeben mit (y', y'') kurz exakt und (x', fy'') linksexakt, dann läßt sich dieses Diagramm ergänzen zu einem wie oben.

Aufgabe 77 (Aufgabe 21.(2), Aufgabe 51.(2))

Zeige.

(1) Sei $A \overset{i}{\bullet\!\!\to} E \overset{p}{\mapsto} B$ eine kurz exakte Sequenz endlicher abelscher Gruppen.
Sind $|A|$ und $|B|$ teilerfremd, dann ist E isomorph zu $A \oplus B$.

(2) Sei $p \geqslant 3$ prim. Sei $k \geqslant 1$. Als abelsche Gruppen ist $\mathrm{U}(\mathbf{Z}/p^k) \simeq \mathbf{Z}/p^{k-1} \oplus \mathbf{Z}/(p-1)$.

(3) Sei $k \geqslant 2$. Als abelsche Gruppen ist $\mathrm{U}(\mathbf{Z}/2^k) \simeq \mathbf{Z}/p^{k-2} \oplus \mathbf{Z}/2$.

Literatur

[1] Baer, R., *Abelian groups that are direct summands of every containing abelian group*, Bull. Am. Math. Soc. 46, 1940.

[2] Bühler, T., *Exact Categories,* Exp. Math. 28 (1), p. 1–69 (s.a. arxiv:0811.1480v2), 2010.

[3] Cartan, H.; Eilenberg, S., *Homological Algebra,* Princeton University Press, 1956.

[4] Freyd, P., *Stable Homotopy,* Proc. Conf. Categorical Algebra, La Jolla, p. 121-172, Springer, 1965.

[5] Grothendieck, A., *Sur quelques points d'Algebre Homologique*, Tôhoku Math. J., 2nd ser., 9, p. 119–221, 1957.

[6] Künzer, M., *Galoistheorie,* Skript, Koblenz, 2009.

[7] Künzer, M., *Topologie,* Skript, Koblenz, 2009.

[8] Künzer, M., *Cohomologie von Gruppen,* Skript, Aachen, 2006.

[9] Mitchell, B., *Theory of categories,* Academic Press, 1965.

[10] Roggenkamp, K.W., *Homologische Algebra,* Skript, Stuttgart, 1975.

[11] Schubert, H., *Kategorien I,* Heidelberger Taschenbücher, 1970.

[12] Serre, J.-P., *Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens,* Ann. of Math. (2) 58, p. 258–294, 1953.

[13] Thomas, S., *On the 3-arrow calculus for homotopy categories*, arXiv:1001.4536, 2010.

[14] Yoneda, N. *On the homology theory of modules,* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. I, 7, p. 193–227, 1954.

[15] Verdier, J.-L., *Des catégories dérivées des catégories abéliennes,* hrsg. von G. Maltsiniotis, Astérisque 239, 2006 (verfaßt 1967).

[16] Weibel, C., *An introduction to Homological Algebra,* Cambridge University Press, 1994.

Das grundlegende Werk über Homologische Algebra stammt von Henri Cartan und Samuel Eilenberg [**3**]. Cartan erinnerte sich wie folgt.

> "Samuel Eilenberg died in New York on January 30, 1998, after spending two years in a state of precarious health. I would like to write here of the mathematician and especially of the friend that I gradually discovered in the course of a close collaboration that lasted at least five years and that taught me many things.
>
> I met Sammy for the first time at the end of December 1947 [...]. Of course, Eilenberg was not unknown to me, because since the end of the war I had begun to be interested in algebraic topology. Notably I had studied the article in the 1944 Annals of Mathematics in which Eilenberg set forth his theory of singular homology (one of those theories which immediately takes on a definitive shape). I had, for my part, reflected on the "Künneth formula", which gives the Betti numbers and the torsion coefficients of the product of two simplicial complexes. In fact, that formula amounts to a calculation of the homology groups of the tensor product of two graded differential groups as a function of the homology groups of each of them. The solution involves not only the tensor product of the homology groups of the factors but also a new functor of these groups, the functor Tor. At the time of my first meeting with Sammy, I was quite happy with telling that to him.

> This was the point of departure for our collaboration, by means of postal mail at first. Then Sammy came to spend the year 1950-51 in Paris. He took part in my seminar at the École Normale, devoted that year to cohomology of groups, spectral sequences, and sheaf theory. Sammy gave two lectures on spectral sequences. Armand Borel and Jean-Pierre Serre took an active part in this seminar also.
>
> Independently of the seminar, Sammy and I had work sessions with the aim of writing an article that would develop some of the new ideas born out of the Künneth formula. [...] It was always he who wrote everything up as we went along in precise and concise English. After the notion of satellites of a functor came that of derived functors, with their axiomatic characterization. Gradually the theory included several existing theories (cohomology of groups, cohomology of Lie algebras, in the sense of Chevalley and Eilenberg, cohomology of associative algebras). [...]
>
> Sammy knew how to put his friends to work. I think I remember that he persuaded Steenrod to contribute the preface of our book, where the evolution of the ideas is explained perfectly. He arranged also for other colleagues to collaborate in the writing of the chapter devoted to finite groups. Our initial project of a mere article for a journal was transformed; it became a book that we would propose to a publisher and for which it would be necessary to find a title that captured its content. We finally agreed on the term Homological Algebra. The text was given to Princeton University Press in 1953. I do not know why the book appeared only in 1956." (Interview in Notices AMS, Nov. 1998)

Der in loc. cit. gewählte Rahmen der Modulkategorien erwies sich trotz bereits zahlreicher Anwendungen als zu eng gefaßt. Buchsbaum, in einem Anhang zu [**3**], und Grothendieck [**5**] entwickelten daraufhin den Begriff der abelschen Kategorie. Für weitere Entwicklungen konsultiere man die Einleitung zu Verdiers Dissertation [**15**].

Die Tatsache, daß Modulkategorien genügend Injektive haben, geht auf Baer zurück [**1**].

Das Yoneda-ext entstammt der Arbeit [**14**] von Yoneda.

Die Lokalisierungstheorie abelscher Kategorien wurde von Serre [**12**] initiiert und von Grothendieck [**5**] zum erstenmal explizit ausgeführt. In größerer Allgemeinheit wird Lokalisierungstheorie e.g. in der Arbeit [**13**] behandelt, nach der ich mich weitgehend gerichtet habe.

Die Freyd-Kategorie einer schwach abelschen Kategorie entstammt der Arbeit [**4,** §3] von Freyd. Siehe auch [**15,** II.§3].

In den Büchern von Mitchell [**9**] und Schubert [**11**] findet man u.a. die Theorie der additiven und der abelschen Kategorien in Lehrbuchform. Das neuere Buch von Weibel [**16**] ist ähnlich umfassend wie das von Cartan-Eilenberg [**3**].