M. Künzer Abgabe bis Mi 20.12.17

Kommutative Algebra, WS 17/18

Blatt 8

Aufgabe 30 (6 Punkte) Wir rechnen in $\widehat{\mathbf{Z}_{(5)}}$.

(1) Man berechne -2.

(2) Man berechne $1/3$.

(3) Man berechne $(\lfloor 1|1|1|1|\ldots\rfloor)^2$.

Aufgabe 31 (12 Punkte) Sei R ein kommutativer Ring. Sei X ein Element.
Sei S eine komplette diskrete Bewertungsalgebra über R mit maximalem Ideal (p).
Sei $(s_n)_{n\geqslant 0}$ eine Folge von Elementen von S.
Es heiße $(s_n)_{n\geqslant 0}$ eine *Cauchyfolge*, falls für alle $k \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ ein $N \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ so existiert, daß für alle $m,\, n \in \mathbf{Z}_{\geqslant N}$ sich $s_n \equiv_{p^k} s_m$ ergibt.
Es heiße s ein *Grenzwert* der Folge $(s_n)_{n\geqslant 0}$, falls für alle $k \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ ein $N \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ so existiert, daß für alle $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant N}$ sich $s_n \equiv_{p^k} s$ ergibt.
Zu zeigen ist folgendes.

(1) Jede Cauchyfolge in S hat einen eindeutigen Grenzwert.

(2) Jede Folge in S, die einen Grenzwert hat, ist eine Cauchyfolge.

(3) Sei $f(X) \in S[X]$ ein Polynom. Sei $(s_n)_{n\geqslant 0}$ eine Folge in S mit Grenzwert s.
Dann ist $(f(s_n))_{n\geqslant 0}$ eine Folge mit Grenzwert $f(s)$.

(4) Sei $f(X) = \sum_{i\geqslant 0} a_i X^i \in S[X]$. Setze $f'(X) := \sum_{i\geqslant 1} i a_i X^{i-1}$.
Seien $x,\, y \in S$. Dann ist $f(x+y) - f(x) - yf'(x) \in (y^2)$.

(5) Sei $f(X) \in S[X]$ ein Polynom. Sei $t \in S$ existent mit $f(t) \equiv_p 0$, aber $f'(t) \not\equiv_p 0$.
Dann gibt es ein $s \in S$ mit $f(s) = 0$. (Hinweis: $s_{k+1} := s_k - \frac{f(s_k)}{f'(s_k)}$, also Newtonverfahren.)

(6) Es gibt in $\widehat{\mathbf{Z}_{(5)}}$ ein Element s mit $s^2 = -1$ und $s \equiv_{5^3} 57$.

Aufgabe 32 (4+2+2+2 Punkte) Sei K ein Körper. Sei T ein Element.
Sei $K[[T]] := \{\, (a_i)_{i\geqslant 0} \,:\, a_i \in K$ für $i \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0} \,\}$. Wir schreiben auch $(a_i)_i := (a_i)_{i\geqslant 0}$.
Sei $\alpha\colon K \to K[[T]]\colon x \mapsto (x\partial_{0,i})_i$.
Wir setzen $(a_i)_i + (b_i)_i := (a_i + b_i)_i$ und $(a_i)_i \cdot (b_i)_i := (\sum_{j\in[0,i]} a_j b_{i-j})_i$ für $(a_i)_i\, ,\, (b_i)_i \in K[[T]]$.
Wir schreiben oft $\sum_{i\geqslant 0} a_i T^i := (a_i)_i$. Insbesondere ist $T = (\partial_{1,i})_i$.
Zu zeigen ist folgendes.

(1) Es ist $K[[T]] = (K[[T]], \alpha)$ eine diskrete Bewertungsalgebra über K mit maximalem Ideal (T).

(2) Wir haben den Isomorphismus $K[T]/(T^k) \to K[[T]]/(T^k)\colon T + (T^k) \mapsto T + (T^k)$ von K-Algebren.

(3) Es ist $K[[T]]$ komplett.

(4) Es gibt einen Isomorphismus von $\widehat{K[T]_{(T)}}$ nach $K[[T]]$, der $\frac{T}{1}$ nach T schickt.