Kommutative Algebra, WS 17/18

Blatt 6

Aufgabe 23 (6 Punkte) Sei $I = (I, \leqslant)$ ein Quasiposet. Zu zeigen ist folgendes.

(1) Für $i,\, j \in I$ sei $i \sim j$ falls $i \leqslant j$ und $j \leqslant i$. Es ist $(\sim)$ eine Äquivalenzrelation.

(2) Für $i \in I$ sei $[i]$ die Äquivalenzklasse von i. Sei $\bar{I} := \{\, [i] \,:\, i \in I \,\}$. Für $i,\, j \in I$ sei $[i] \leqslant [j]$, falls $i \leqslant j$. Dann ist $\bar{I} = (\bar{I}, \leqslant)$ ein Poset.

(3) Wir haben eine monotone Abbildung $\rho\colon I \to \bar{I} \colon i \mapsto [i]$. Wir haben eine monotone Abbildung $\sigma\colon \bar{I} \to I$ mit $\rho \circ \sigma = \mathrm{id}_{\bar{I}}$.

Aufgabe 24 (3 Punkte) Seien R ein kommutativer Ring.
Sei S eine noethersche kommutative R-Algebra. Sei $N \subseteq S$ eine multiplikative Teilmenge.
Zu zeigen ist, daß $S/\!\!/N$ noethersch ist.

Aufgabe 25 (4 Punkte) Sei R ein kommutativer Ring. Sei I ein nichtleeres gerichtetes Quasiposet. Sei $\mathcal{S} := \big((S_i)_{i \in I}\,,\ (S_j \xleftarrow{u_{j,i}} S_i)_{j,\,i \in I,\, j \geqslant i}\big)$ ein Diagramm von kommutativen R-Algebren.
Zu zeigen ist folgendes.

(1) Sei $u_{j,i}$ injektiv für $j,\, i \in I$ mit $j \geqslant i$. Dann ist $\omega_i^{\mathcal{S}}$ injektiv für $i \in I$.

(2) Sei $u_{j,i}$ surjektiv für $j,\, i \in I$ mit $j \geqslant i$. Dann ist $\omega_i^{\mathcal{S}}$ surjektiv für $i \in I$.

Aufgabe 26 (16 Punkte) Sei R ein kommutativer Ring.
Sei S eine integre R-Algebra. Sei $K := \mathrm{Quot}(S)$. Wir identifizieren $S = \lambda_{S,S^\times}(S) \subseteq K$.
Es heißt S eine *Primfaktoralgebra* über R (oder auch ein *UFD*), falls jedes Element in $S^\times \smallsetminus \mathrm{U}(S)$ als Produkt von Primelementen geschrieben werden kann.
Sei S eine Primfaktoralgebra. Sei X ein einzelnes Element. Es heißt $f(X) \in S[X]^\times$ *primitiv*, falls es kein $p \in S^\times$ prim gibt mit $f(X) \in p \cdot S[X]$.
Zu zeigen ist folgendes.

(1) Seien $f(X),\, g(X) \in S[X]^\times$ primitiv. Dann ist auch $f(X) \cdot g(X)$ primitiv.

(2) Sei $p \in S^\times$ prim. Für $x \in K^\times$ gibt es eindeutige Elemente $k \in \mathbf{Z}$ und $u \in \mathrm{U}(S_{(p)})$ mit $x = p^k u$. Wir schreiben $\mathrm{v}_p(x) := k$. Es ist $S_{(p)}^\times = \{\, x \in K^\times \,:\, \mathrm{v}_p(x) \geqslant 0 \,\}$.
Es ist $S^\times = \{\, x \in K^\times \,:\, \mathrm{v}_q(x) \geqslant 0$ für $q \in S^\times$ prim $\}$.
Es ist $\mathrm{U}(S) = \{\, x \in K^\times \,:\, \mathrm{v}_q(x) = 0$ für $q \in S^\times$ prim $\}$.

(3) Wir setzen noch $\mathrm{v}_p(0) := \infty$, mit der Vereinbarung $z \leqslant \infty$ für $z \in \mathbf{Z}$.
Sei $f(X) = \sum_{i \in [0,k]} a_i X^i \in K[X]^\times$ gegeben. Es ist $f(X)$ ein primitives Element von $S[X]^\times$ genau dann, wenn $\min_{i \in [0,k]} \mathrm{v}_q(a_i) = 0$ ist für $q \in S^\times$ prim.

(4) Sei $f(X) \in K[X]^\times$. Es gibt ein $t \in K^\times$ mit $t \cdot f(X)$ primitiv.

(5) Sei $f(X) \in S[X]^\times$ primitiv und sei $f(X)$ prim als Element von $K[X]$.
Dann ist $(K[X]f(X)) \cap S[X] = S[X]f(X)$. Insbesondere ist $f(X)$ prim in $S[X]$.

(6) Sei $p \in S^\times$ prim. Dann ist p auch prim als Element in $S[X]$.

(7) Es ist $S[X]$ eine Primfaktoralgebra.

(8) Sei $k \geqslant 1$. Sei L ein Körper. Es ist $L[X_1\,,\,\ldots\,,\,X_k]$ eine Primfaktoralgebra über L.