M. Künzer Abgabe bis Mi 07.02.18

Kommutative Algebra, WS 17/18

Blatt 13

Aufgabe 48 (6 Punkte) Sei R ein kommutativer Ring. Sei $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$.
Sei Cramer(R) die folgende Aussage:
Sei $A = (a_{i,j})_{i\in[1,n],\, j\in[1,n]} \in R^{n\times n}$ gegeben.
Wir bilden $A' := ((-1)^{k+\ell} \det((a_{i,j})_{i\in[1,n]\smallsetminus\{k\},\, j\in[1,n]\smallsetminus\{\ell\}}))_{\ell,k} \in R^{n\times n}$.
Dann ist $A'A = \det(A)\cdot \mathrm{E}_n$.

(1) Seien U und V kommutative Ringe. Sei $g\colon U \to V$ ein Ringmorphismus. Ist g surjektiv, so folgere man aus Cramer(U) die Gültigkeit von Cramer(V). Ist g injektiv, so folgere man aus Cramer(V) die Gültigkeit von Cramer(U).

(2) Man finde eine integre kommutative $\mathbf{Z}$-Algebra S und einen surjektiven Morphismus $f : S \to R$ von $\mathbf{Z}$-Algebren. Sei $K := \mathrm{Quot}(S)$.

(3) Die Gültigkeit von Cramer(K) kann aus Linearer Algebra als bekannt vorausgesetzt werden. Man folgere Cramer(S) und dann Cramer(R).

Aufgabe 49 (6 Punkte) Seien X und Y zwei Elemente. Man zeige oder widerlege folgendes. Sei K ein Körper. Sei $f(X,Y) \in K[X,Y]$ gegeben mit $f(x,y) = 0$ für alle $x,\, y \in K$ mit $x^2+y^2 = 1$. Dann ist X^2+Y^2-1 in $K[X,Y]$ ein Teiler von $f(X,Y)$.

(1) $K = \mathbf{C}$ (2) $K = \mathbf{F}_3$ (3) $K = \mathbf{F}_2$

Aufgabe 50 (3+4+2+2+1 Punkte)
Sei R ein kommutativer Ring. Sei S eine kommutative R-Algebra. Sei M ein S-Modul.

(1) Seien $A \subseteq B \subseteq M$ Teilmoduln. Seien $A' \subseteq B' \subseteq M$ Teilmoduln. Man finde Isomorphismen von S-Moduln
$$\frac{(B'\cap B)+A}{(A'\cap B)+A} \overset{\sim}{\longleftarrow} \frac{B\cap B'}{(A\cap B')+(B\cap A')} \overset{\sim}{\longrightarrow} \frac{(B\cap B')+A'}{(A\cap B')+A'}\,.$$

(2) Seien Teilmodulreihen $(\tilde{M}_i)_{i\in[0,\ell]}$ und $(M_i)_{i\in[0,\ell]}$ von M gegeben.

Es heißt $(\tilde{M}_i)_{i\in[0,\ell]}$ eine *Verfeinerung* von $(M_i)_{i\in[0,k]}$, wenn es eine injektive monotone Abbildung $f\colon [0,k] \to [0,\ell]$ gibt mit $M_i = \tilde{M}_{f(i)}$ für $i \in [0,k]$.

Es heißen $(M_i)_{i\in[0,k]}$ und $(\tilde{M}_i)_{i\in[0,\ell]}$ *äquivalent*, wenn es eine Bijektion $\sigma\colon [1,k] \to [1,\ell]$ gibt mit $M_i/M_{i-1} \simeq \tilde{M}_{\sigma(i)}/\tilde{M}_{\sigma(i)-1}$ für $i \in [1,k]$.

Man zeige, daß zwei Teilmodulreihen von M äquivalente Verfeinerungen besitzen.

(3) Man zeige, daß zwei echte Teilmodulreihen von M äquivalente Verfeinerungen besitzen, die echte Teilmodulreihen sind.

(4) Sei $(\tilde{M}_i)_{i\in[0,\ell]}$ eine Kompositionsreihe und $(M_i)_{i\in[0,k]}$ eine echte Teilmodulreihe von M. Man zeige, daß $(M_i)_{i\in[0,k]}$ eine Verfeinerung besitzt, die zu $(\tilde{M}_i)_{i\in[0,\ell]}$ äquivalent ist.

Man folgere $k \leqslant \ell$.

(5) Man zeige, daß zwei Kompositionsreihen von M äquivalent sind.