M. Künzer Abgabe bis Mi 24.01.18

Kommutative Algebra, WS 17/18

Blatt 11

Aufgabe 42 (8+3 Punkte) Sei R ein kommutativer Ring.
Seien $A = (A, \alpha)$ und $B = (B, \beta)$ kommutative R-Algebren. Zu zeigen ist folgendes.

(1) Es wird der R-Modul $A \underset{R}{\otimes} B$ zu einem kommutativen Ring vermittels

$$(\sum_{i \in I} a_i \otimes b_i) \cdot (\sum_{j \in J} a'_j \otimes b'_j) \; := \sum_{i \in I,\, j \in J} a_i a'_j \otimes b_i b'_j \;,$$

wobei I und J endliche Mengen sind, wobei $a_i \in A$ und $b_i \in B$ liegen für $i \in I$ und wobei $a'_j \in A$ und $b'_j \in B$ liegen für $j \in J$.

Es wird $A \underset{R}{\otimes} B$ zu einer kommutativen R-Algebra vermittels des Strukturmorphismus $\gamma\colon R \to A \underset{R}{\otimes} B\colon r \mapsto \gamma(r) := \alpha(r) \otimes 1 = 1 \otimes \beta(r)$.

Die R-Modulstruktur auf $A \underset{R}{\otimes} B$ aus Definition 120 stimmt mit der via Strukturmorphismus γ und Beispiels 112.(4) überein.

(2) Es sind $\kappa_1\colon A \to A \underset{R}{\otimes} B\colon a \mapsto a \otimes 1$ und $\kappa_2\colon B \to A \underset{R}{\otimes} B\colon b \mapsto 1 \otimes b$ Morphismen von R-Algebren.

Sei eine kommutative R-Algebra $T = (T, \delta)$ gegeben, zusammen mit R-Algebrenmorphismen $t_1\colon A \to T$ und $t_2\colon B \to T$. Dann gibt es genau einen R-Algebrenmorphismus $t\colon A \underset{R}{\otimes} B \to T$ mit $t \circ \kappa_1 = t_1$ und $t \circ \kappa_2 = t_2$. Dieser erfüllt $t(a \otimes b) = t_1(a) \cdot t_2(b)$ für $a \in A$ und $b \in B$.

Aufgabe 43 (2+2+4+2 Punkte) Sei R ein kommutativer Ring.
Seien R-Moduln M, M', N und N' gegeben.
Sei $f\colon M \to M'$ eine R-lineare Abbildung. Sei $g\colon N \to N'$ eine R-lineare Abbildung.
Zu zeigen ist folgendes.

(1) Wir haben die R-lineare Abbildung $f \otimes g\colon M \underset{R}{\otimes} N \to M' \underset{R}{\otimes} N'$ mit $(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n)$ für $m \in M$ und $n \in N$.

(2) Wir haben den Isomorphismus von R-Moduln $\sigma\colon M \underset{R}{\otimes} N \to N \underset{R}{\otimes} M$ mit $\sigma(m \otimes n) = n \otimes m$ für $m \in M$ und $n \in N$.

(3) Wir haben die R-lineare Abbildung $f\colon (M \oplus M') \underset{R}{\otimes} N \to (M \underset{R}{\otimes} N) \oplus (M' \underset{R}{\otimes} N)$ mit $f((m, m') \otimes n) = (m \otimes n, m' \otimes n)$ für $m \in M$, $m' \in M'$ und $n \in N$.

Wir haben die R-lineare Abbildung $g\colon (M \underset{R}{\otimes} N) \oplus (M' \underset{R}{\otimes} N) \to (M \oplus M') \underset{R}{\otimes} N$ mit $g(m \otimes n, m' \otimes \tilde{n}) = (m, 0) \otimes n + (0, m') \otimes \tilde{n}$ für für $m \in M$, $m' \in M'$ und $n, \tilde{n} \in N$.

Es sind f und g sich invertierende Isomorphismen von R-Moduln.

(4) Wir haben den Isomorphismus von R-Moduln $f\colon R \underset{R}{\otimes} M \to M$ mit $f(r \otimes m) = rm$ für $r \in R$ und $m \in M$.

Aufgabe 44 (10 Punkte) Folgendes ist zu zeigen oder zu widerlegen.
Sei R ein kommutativer Ring. Seien R-Moduln M und N gegeben. Seien kommutative R-Algebren $A = (A, \alpha)$ und $B = (B, \beta)$ gegeben.

(1) Ist $M \neq 0$ und $N \neq 0$, dann ist auch $M \underset{R}{\otimes} N \neq 0$.

(2) Die Abbildung $\boldsymbol{\tau}_{M,N}$ ist surjektiv.

(3) Seien X und Y Elemente. Es gibt den R-Algebrenisomorphismus $f \colon R[X] \underset{R}{\otimes} R[Y] \xrightarrow{\sim} R[X, Y]$ mit $f(X \otimes 1) = X$ und $f(1 \otimes Y) = Y$.

(4) Seien A und B integer. Dann ist $A \underset{R}{\otimes} B$ eine integre R-Algebra.

(5) Wir betrachte die R-Algebrenmorphismen κ_1 und κ_2 aus Bemerkung 123.
Sei $F := \{\, (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) \in \operatorname{Spec}(A) \times \operatorname{Spec}(B) \,:\, \alpha^{-1}(\mathfrak{p}_1) = \beta^{-1}(\mathfrak{p}_2) \,\}$ das *Faserprodukt.*
Die Abbildung $\operatorname{Spec}(A \underset{R}{\otimes} B) \to F \colon \mathfrak{p} \mapsto (\kappa_1^{-1}(\mathfrak{p}), \kappa_2^{-1}(\mathfrak{p}))$ ist bijektiv.