M. Künzer Abgabe bis Mi 17.01.18

Kommutative Algebra, WS 17/18

Blatt 10

Aufgabe 37 (3 Punkte) Sei K ein Körper.
Sei S eine kommutative K-Algebra. Sei S endlich über K. Sei (0) prim in S.
Es ist (0) als maximal in S nachzuweisen.

Aufgabe 38 (4+2 Punkte) Sei R ein kommutativer Ring. Seien R-Moduln M und T gegeben. Sei $t\colon M \to T$ eine R-lineare Abbildung. Sei $N \subseteq M$ ein Teilmodul.

(1) Die abelsche Gruppe M/N wird durch $r \cdot (m+N) := (r \cdot m) + N$ für $r \in R$ und $m \in M$ zu einem R-Modul. Wir haben die R-lineare Abbildung $\rho\colon M \to M/N\colon m \mapsto m + N$.

(2) Ist $N \subseteq \mathrm{Kern}(f)$, dann existiert genau eine R-lineare Abbildung $\bar{t}\colon M/N \to T$ mit $\bar{t} \circ \rho = t$.

Aufgabe 39 (2+4+2 Punkte) Sei R ein kommutativer Ring. Sei S eine kommutative R-Algebra.

(1) Sei $M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} M''$ eine kurz exakte Sequenz von S-Moduln.

Sind M' und M'' endlich erzeugt, dann ist M als endlich erzeugt nachzuweisen.

(2) Sei S noethersch. Zu zeigen ist mittels Induktion, daß für jedes $k \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ jeder S-Teilmodul U von $S^{\oplus k}$ endlich erzeugt ist.

Man betrachte hierzu die Abbildung $p\colon S^{\oplus k} \to S^{\oplus (k-1)}\colon (s_i)_{i\in[1,k]} \mapsto (s_i)_{i \in [1,k-1]}$ und den Teilmodul $p(U)$ von $S^{\oplus(k-1)}$. Man ergänze $p|_U^{p(U)}\colon U \to p(U)$ zu einer kurz exakten Sequenz. Auf den Kern wende man die Voraussetzung an S an, auf $p(U)$ die Induktionsvoraussetung und sodann (1).

(3) Sei S noethersch. Sei M ein endlich erzeugter S-Modul. Sei $M' \subseteq M$ ein Teilmodul. Zu zeigen ist, daß M' endlich erzeugt ist.

Hierzu wende man (2) auf das Urbild U von M' unter einer surjektiven S-linearen Abbildung $S^{\oplus k} \to M$ an, mit $k \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ geeignet.

Aufgabe 40 (1+5 Punkte) Sei R ein kommutativer Ring. Seien R-Moduln M und N gegeben. Zu zeigen ist folgendes.

(1) Jedes Element von $M \underset{R}{\otimes} N$ ist von der Form $\sum_{(m,n)\in W} m \otimes n$ für eine endliche Teilmenge $W \subseteq M \times N$.

(2) Sei T ein R-Modul. Sei $t\colon M \times N \to T$ eine Abbildung mit

$$\begin{array}{rcl} t(rm + r'm', n) & = & rt(m,n) + r't(m',n) \\ t(m, rn + r'n') & = & rt(m,n) + r't(m,n') \end{array}$$

für $r,\, r' \in R$, $m,\, m' \in M$, $n,\, n' \in N$.

Dann gibt es genau eine R-lineare Abbildung $\hat{t}\colon M \underset{R}{\otimes} N \to T$ mit $\hat{t} \circ \boldsymbol{\tau} = t$.