M. Truong, M. Künzer Abgabe bis Fr 29.07.2022 im Ilias

Algebra für Lehramt, SoSe 22

Blatt 13

Aufgabe 49 Für Kreisteilungspolynome verfügen wir über die Formel $X^n - 1 = \prod_{\substack{d \in [1,n] \\ d \text{ teilt } n}} \Phi_d(X)$.

(1) Für jedes $n \in [1, 8]$ bestimme man das Kreisteilungspolynom $\Phi_n(X)$ unter Verwendung dieser Formel.

(2) Sei $p \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ eine Primzahl. Man bestimme $\Phi_{p^2}(X)$ unter Verwendung dieser Formel.
Ist das Bild von $\Phi_{p^2}(X)$ in $\mathbb{F}_p[X]$ unter koeffizientenweiser Restklassenbildung wieder irreduzibel?

Aufgabe 50 Man untersuche folgende Polynome aus $\mathbb{Q}[X]$ auf Irreduzibilität.

(1) $X^7 - 6X^3 + 4X^2 + 6$

(2) $X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X + 3$

(3) $X^6 + 3X^3 + 2$

(4) $X^4 - 3X^3 + 9$

Aufgabe 51

(1) Man finde eine Primzahl $p \geqslant 5$, für welche $\mathrm{U}(\mathbb{F}_p) \neq \langle 3 \rangle$ ist.

(2) Sei $\mathbb{F}_{16} = \mathbb{F}_2[X]/(X^4 + X + 1)$. Sei $\delta = X + (X^4 + X + 1)$.
In $\mathbb{F}_{16}$ ist also $2 = 0$ und $\delta^4 = -\delta - 1 = \delta + 1$.
Ist $\mathrm{U}(\mathbb{F}_{16}) = \langle \delta \rangle$?
Man bestimme $|\{ x \in \mathbb{F}_{16}^\times : \mathrm{U}(\mathbb{F}_{16}) = \langle x \rangle \}|$.

Aufgabe 52 Sei K ein Körper. Sei $f(X) \in K[X]^\times$.
Es heiße $f(X)$ *kubusfrei*, falls es kein $u(X) \in K[X]$ gibt mit $\deg(u(X)) \geqslant 1$, für welches $u(X)^3$ ein Teiler von $f(X)$ ist.
Man zeige folgendes.

(1) Ist $\mathrm{ggT}(f(X), f'(X), f''(X)) = 1$, dann ist $f(X)$ kubusfrei.

(2) Ist $\mathrm{char}(K) = 0$ und ist $f(X)$ kubusfrei, dann ist $\mathrm{ggT}(f(X), f'(X), f''(X)) = 1$.

`pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/lexmath/kuenzer/alg22/`