

## Algebra für Lehramt, SoSe 22

**Blatt 12**

**Aufgabe 45** Sei  $\mathbb{F}_8 := \mathbb{F}_2[X]/(X^3 + X + 1)$ , sei  $\beta := X + (X^3 + X + 1) \in \mathbb{F}_8$ .

- (1) Man bestimme das Minimalpolynom  $\mu_{\beta^2+1, \mathbb{F}_2}(X) \in \mathbb{F}_2[X]$ .
- (2) Gibt es in  $\mathbb{F}_8$  einen Teilkörper  $K$  mit  $|K| = 4$ ?
- (3) Gibt es in  $\mathbb{F}_8$  ein Element  $u$ , dessen Minimalpolynom  $\mu_{u, \mathbb{F}_2}(X)$  Grad 2 hat?

**Aufgabe 46**

- (1) Man konstruiere einen Körper  $\mathbb{F}_{25}$  mit  $|\mathbb{F}_{25}| = 25$ .
- (2) Man bestimme in  $U(\mathbb{F}_{25})$  ein Element  $u$ , das nicht in  $\mathbb{F}_5$  liegt, dessen Quadrat aber in  $\mathbb{F}_5$  liegt. Ist  $\text{Syl}_2(U(\mathbb{F}_{25})) = \{\langle u \rangle\}$ ?
- (3) Man bestimme in  $U(\mathbb{F}_{25})$  ein Element der Ordnung 3.
- (4) Sind die Ringe  $\mathbb{F}_{25}$  und  $\mathbb{Z}/(25)$  isomorph?

**Aufgabe 47**

- (1) Sei  $L|K$  eine Körpererweiterung. Sei  $\text{Aut}(L|K)$  die Menge der Automorphismen von  $L$  über  $K$ . Man zeige: Es ist  $\text{Aut}(L|K)$  eine Untergruppe von  $S_L$ .
- (2) Man bestimme  $\text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2})|\mathbb{Q})$ .
- (3) Man konstruiere einen Körper  $\mathbb{F}_{27}$  mit  $|\mathbb{F}_{27}| = 27$ . Man bestimme  $\text{Aut}(\mathbb{F}_{27}|\mathbb{F}_3)$ .

**Aufgabe 48** Wir schreiben  $\zeta := \zeta_5 = \exp(\frac{2\pi i}{5})$ . Wir betrachten die Körpererweiterung  $\mathbb{Q}(\zeta)|\mathbb{Q}$ . Wir verwenden:  $\mu_{\zeta, \mathbb{Q}}(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = \frac{X^5-1}{X-1}$ .

- (1) Man bestimme eine  $\mathbb{Q}$ -lineare Basis von  $\mathbb{Q}(\zeta)$ . Man bestimme  $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}]$ .
- (2) Man bestimme  $\mu_{\zeta+\zeta^{-1}, \mathbb{Q}}(X)$ .
- (3) Man zeige:  $\mu_{\zeta^{-1}, \mathbb{Q}}(X) = \mu_{\zeta, \mathbb{Q}}(X + 1)$ . Man bestimme  $\mu_{\zeta^{-1}, \mathbb{Q}}(X)$ .