M. Truong, M. Künzer Abgabe bis Fr 15.07.2022

Algebra für Lehramt, SoSe 22

Blatt 11

Aufgabe 41 Sei G eine Gruppe mit $|G| = 175$.

(1) Sei $U \leqslant G$ mit $|U| = 35$. Man zeige mittels Lemma 177: Es ist $U \trianglelefteq G$.

(2) Man zeige, daß G eine normale 5-Sylowgruppe und eine normale 7-Sylowgruppe hat.

(3) Man zeige: G ist abelsch. Man zeige damit erneut: Es ist $U \trianglelefteq G$.

(4) Man gebe bis auf Isomorphie alle abelschen Gruppen der Ordnung 175 an.

Aufgabe 42

(1) Man bestimme alle abelschen Gruppen von Ordnung 81 bis auf Isomorphie.

(2) Man bestimme alle abelschen Gruppen von Ordnung 72 bis auf Isomorphie.

Aufgabe 43

(1) Sei G eine zyklische Gruppe. Sei H eine Gruppe. Sei $G \simeq H$. Man zeige: Es ist H zyklisch.

(2) Seien G und H endliche Gruppen. Sei $G \simeq H$. Sei p prim.
Sei $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Sei $Q \in \mathrm{Syl}_p(H)$. Man zeige: $P \simeq Q$.

(3) Man bestimme eine abelsche Gruppe G mit $|G| = 12$, die ein Element von Ordnung 4 enthält.

Man bestimme eine abelsche Gruppe H mit $|H| = 12$, die kein Element von Ordnung 4 enthält.

Man zeige: $G \not\simeq H$.

Aufgabe 44 Wir erinnern an $\zeta := \zeta_3 = \exp(\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}) \in \mathbb{C}$ mit $\zeta^3 = 1$.

(1) Man zeige: ζ ist algebraisch über $\mathbb{Q}$.

(2) Man zeige: $(X - \zeta)(X - \overline{\zeta}) \in \mathbb{Q}[X]$.

(3) Man bestimme das Minimalpolynom $\mu_{\zeta,\mathbb{Q}}(X)$.
Teilt es jedes $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ mit $f(\zeta) = 0$?
Teilt es jedes $f(X) \in \mathbb{C}[X]$ mit $f(\zeta) = 0$?

(4) Man bestimme eine $\mathbb{Q}$-lineare Basis von $\mathbb{Q}(\zeta)$. Man bestimme $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}]$.