

## Algebra für Lehramt, SoSe 22

**Blatt 10**

**Aufgabe 37** Wir betrachten die Diedergruppe  $D_{12}$ .

- (1) Man bestimme  $Z(D_{12})$ .
- (2) Man gebe alle 2-Sylowgruppen von  $D_{12}$  an.
- (3) Wir betrachten die  $D_{12}$ -Menge  $X := \text{Syl}_2(D_{12})$ , mit der Operation durch Konjugation.  
Man zeige: Der Operationsmorphismus  $\varphi : D_{12} \rightarrow S_X$  ist surjektiv.  
Es ist  $\text{Kern}(\varphi) = Z(D_{12})$ .

**Aufgabe 38** Sei  $U := \langle \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle \leq \text{GL}_2(\mathbb{F}_5) =: G$ .

- (1) Man bestimme einen Gruppenisomorphismus  $\varphi : D_8 \rightarrow U$ .
- (2) Es operiert  $U$  auf  $X := \mathbb{F}_5^{2 \times 1}$  durch Matrixmultiplikation.  
Man finde ein Element  $x \in X$  mit  $|\text{Stab}_U(x)| = 2$ .
- (3) Sei  $D := \{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, d \in \mathbb{F}_5^\times \} \leq G$ .  
Man zeige: Es ist  $U \leq N_G(D)$ . Es ist  $|D \cap U| = 4$ . Es ist  $UD \in \text{Syl}_2(G)$ .

**Aufgabe 39**

- (1) Sei  $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2 \times 3}$ .  
Man bestimme eine Matrix  $D \in \mathbb{Z}^{2 \times 3}$  in Elementarteilerform, für welche es  $S \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$  und  $T \in \text{GL}_3(\mathbb{Z})$  gibt mit  $SAT = D$ . Man gebe nur  $D$  an.
- (2) Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 10 & 8 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 11 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{4 \times 3}$ .  
Man bestimme eine Matrix  $D \in \mathbb{Z}^{4 \times 3}$  in Elementarteilerform, für welche es  $S \in \text{GL}_4(\mathbb{Z})$  und  $T \in \text{GL}_3(\mathbb{Z})$  gibt mit  $SAT = D$ . Man gebe nur  $D$  an.

**Aufgabe 40**

- (1) Sei  $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ . Man finde  $S, T \in \text{GL}_3(\mathbb{Z})$  mit  $SAT = D$  in Elementarteilerform.  
Man gebe  $S, T$  und  $D$  an.
- (2) Sei  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ . Man finde  $S, T \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$  mit  $SAT = D$  in Elementarteilerform.  
Man gebe  $S, T$  und  $D$  an.