M. Truong, M. Künzer Abgabe bis Fr 01.07.2022

Algebra für Lehramt, SoSe 22

Blatt 9

Aufgabe 33 Sei G eine endliche Gruppe. Sei p eine Primzahl. Sei $|G| \equiv_p 0$.
Wir wollen zeigen: Sylow (Satz 154) impliziert Cauchy (Lemma 151). In der Lösung sollte also kein direkter Gebrauch von Lemma 151 gemacht werden.

(1) Man zeige: In G gibt es eine p-Untergruppe U mit $U \neq 1$.

(2) Man folgere aus (1): Es gibt in G ein Element x von Ordnung p^c für ein $c \geqslant 1$.

(3) Man folgere aus (2): Es gibt in G ein Element y von Ordnung p.

(4) Man zeige oder widerlege: Sei H eine endliche Gruppe. Sei $s \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2}$. Sei $|H| \equiv_s 0$.
Es gibt in H ein Element von Ordnung s.

Aufgabe 34 Seien p und q Primzahlen mit $p < q$. Sei $q - 1 \not\equiv_p 0$.
Sei G eine Gruppe von Ordnung $|G| = p \cdot q$.

(1) Man zeige: Es gibt in G eine normale q-Sylowgruppe.

(2) Man zeige: Es gibt in G eine normale p-Sylowgruppe.

(3) Sei $H := \{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{smallmatrix}\right) : x \in \mathbb{F}_7 ,\ y \in \mathbb{F}_7^\times ,\ y^3 = 1 \} \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_7)$.

  (a) Man zeige: H ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_7)$ mit $|H| = 3 \cdot 7$.

  (b) Man zeige: In H gibt es eine 3-Sylowgruppe, die kein Normalteiler in H ist.

Aufgabe 35

(1) Sei G eine Gruppe von Ordnung $|G| = 40$, die keine normale 2-Sylowgruppe enthält.
Man bestimme $|\operatorname{Syl}_2(G)|$ und $|\operatorname{Syl}_5(G)|$.

(2) Sei G eine Gruppe von Ordnung $|G| = 225$, die keine normale 3-Sylowgruppe enthält.
Man bestimme $|\operatorname{Syl}_3(G)|$ und $|\operatorname{Syl}_5(G)|$.

Aufgabe 36 Wir betrachten die Elemente $g_1 := (1,2)(3,4)$, $g_2 := (1,3)(2,4)$, $g_3 := (1,4)(2,3)$ in S_4. Es ist $X := \{g_1, g_2, g_3\}$ eine Konjugationsklasse in S_4. Es ist $V := \{\mathrm{id}\} \sqcup X$ eine abelsche Untergruppe von S_4.

(1) Sei $\psi : \mathrm{S}_3 \to \mathrm{S}_X : f \mapsto (g_i \mapsto g_{f(i)})$. Man zeige: Es ist ψ ein Gruppenisomorphismus.

(2) Wir haben die Operation von S_4 auf der Konjugationsklasse X. Dies liefert einen Operationsmorphismus $\varphi : \mathrm{S}_4 \to \mathrm{S}_X$.
Sei $\alpha := \psi^{-1} \circ \varphi : \mathrm{S}_4 \to \mathrm{S}_3$. Man zeige: Es ist α ein surjektiver Gruppenmorphismus.

(3) Man zeige: Es ist $\mathrm{Kern}(\alpha) = V$.