M. Truong, M. Künzer Abgabe bis Fr 24.06.2022

Algebra für Lehramt, SoSe 22

Blatt 8

Aufgabe 29

(1) Sei $n \geqslant 1$. Sei K ein Körper. Sei $G = \mathrm{GL}_n(K)$. Sei $X = K^{n\times 1}$.
Man zeige: Vermittels herkömmlicher Multiplikation von Matrizen mit Vektoren wird X zu einer G-Menge.

(2) Man bestimme die Bahnen der G-Menge X.

(3) Sei nun $n = 2$ und $K = \mathbb{F}_5$. Es ist also $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5)$ und $X = \mathbb{F}_5^{2\times 1}$.

(a) Man bestimme $U := \mathrm{Stab}_G(\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right))$.

(b) Wir betrachten die U-Menge $\mathbb{F}_5^{2\times 1}$. Man bestimme die Bahnen von $\mathbb{F}_5^{2\times 1}$ unter der Operation von U.

Aufgabe 30 Sei $a := (1, 2, 3, 4) \in \mathrm{S}_4$. Sei $b := (2, 4)$. Sei $\mathrm{D}_8 := \langle a, b\rangle \leqslant \mathrm{S}_4$.

(1) Man verifiziere: ${}^b a = a^{-1}$. Man verwende dies, um

$$\mathrm{D}_8 \;=\; \{\, a^i \circ b^j \;:\; i \in [0, 3],\; j \in [0, 1]\,\}$$

zu begründen. Man gebe alle Elemente von D_8 in Zykelschreibweise an.

(2) Es ist $[1, 4]$ eine D_8-Menge, wobei Multiplikation durch Anwendung gegeben ist.
Man bestimme dafür den Stabilisator $\mathrm{Stab}_{\mathrm{D}_8}(2)$.

(3) Man bestimme die Konjugationsklassen von D_8 . Man bestimme das Zentrum $\mathrm{Z}(\mathrm{D}_8)$.

Aufgabe 31 Seien G und H Gruppen. Sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenmorphismus.
Sei $k \geqslant 1$ und seien $g_1, \ldots, g_k \in G$. Sei $U := \langle g_1, \ldots, g_k\rangle \leqslant G$.

(1) Man zeige: $\varphi(U) = \langle \varphi(g_1), \ldots, \varphi(g_k)\rangle$.

(2) Sei $x \in G$. Man zeige: ${}^x U = \langle {}^x g_1, \ldots, {}^x g_k\rangle$.

(3) In der S_4-Menge $\mathcal{U}(\mathrm{S}_4)$ liegt $U := \langle (1, 2, 3, 4)\rangle \leqslant \mathrm{S}_4$.
Man zeige: $\mathrm{Stab}_{\mathrm{S}_4}(U) = \mathrm{D}_8$; vgl. Aufgabe 30.

Aufgabe 32

(1) Sei $n \geqslant 3$. Man zeige: $\mathrm{Z}(\mathrm{S}_n) = 1$.

(2) Sei $n \geqslant 2$. Sei K ein Körper. Man zeige: $\mathrm{Z}(\mathrm{GL}_n(K)) = \{\, c \cdot \mathrm{E}_n \;:\; c \in K^\times \,\}$.