

Algebra für Lehramt, SoSe 22

Blatt 7

Aufgabe 25 Sei $V := \langle (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4) \rangle \trianglelefteq S_4$.

- (1) Ist S_3/A_3 eine abelsche Gruppe?
- (2) Ist A_4/V eine abelsche Gruppe?
- (3) Ist S_4/V eine abelsche Gruppe?

Aufgabe 26

- (1) Man berechne ${}^{(1,2,3,4)}(1, 3, 5)(2, 4)$ in S_5 .
- (2) Sei $x := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Man berechne ${}^x \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ in $GL_2(\mathbb{Q})$.
- (3) Man berechne $\{ \sigma \in S_4 : \sigma(1, 2)(3, 4) = (1, 2)(3, 4) \}$.

Aufgabe 27

- (1) Sei G eine Gruppe. Sei $x \in G$ mit $G = \langle x \rangle$ gegeben. Sei $|\langle x \rangle| = 10$.
Sei H eine Gruppe. Sei $y \in H$ mit $H = \langle y \rangle$ gegeben. Sei $|\langle y \rangle| = 4$.
Man bestimme alle Gruppenmorphisimen von G nach H .
- (2) Wir betrachten die Gruppen $\mathbb{C} = (\mathbb{C}, +)$ und $\mathbb{C}^\times = (\mathbb{C}^\times, \cdot)$.
Man zeige: Es ist $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ ein Gruppenmorphismus.
Man bestimme $\text{Kern}(\exp)$.

Aufgabe 28 Sei

$$\begin{array}{ccc} GL_2(\mathbb{Z}/(9)) & \xrightarrow{\varphi} & GL_2(\mathbb{Z}/(3)) \\ \begin{pmatrix} a+(9) & b+(9) \\ c+(9) & d+(9) \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} a+(3) & b+(3) \\ c+(3) & d+(3) \end{pmatrix}, \end{array}$$

wobei $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

Man zeige: φ ist ein surjektiver Gruppenmorphismus.

Man bestimme $|\text{Kern}(\varphi)|$. Man bestimme $|GL_2(\mathbb{Z}/(3))| = |GL_2(\mathbb{F}_3)|$. Man bestimme $|GL_2(\mathbb{Z}/(9))|$.