

Algebra für Lehramt, SoSe 22

Blatt 6**Aufgabe 21**

(1) Sei $m \geq 2$. Man zeige: $U(\mathbb{Z}/(m)) = \{k + (m) : k \in \mathbb{Z}, \text{ggT}(k, m) = 1\}$.

Wir machen auch wieder Gebrauch von der Kurzschreibweise $k \stackrel{\text{kurz}}{=} k + (m)$.

(2) Man bestimme $|U(\mathbb{Z}/(8))|$. Ist $U(\mathbb{Z}/(8))$ zyklisch?

(3) Man bestimme $|U(\mathbb{Z}/(27))|$. Ist $U(\mathbb{Z}/(27)) = \langle 2 \rangle$?

Aufgabe 22 Man zeige oder widerlege.

Sei G eine Gruppe.

(1) Sei $N \trianglelefteq G$. Sei $x \in G$. Es ist $|\langle xN \rangle|$ ein Teiler von $|\langle x \rangle|$.

(2) Ist $n \in N \triangleleft G$ und $x \in G$, dann ist $xn = nx$.

(3) Seien $U, V \leq G$. Es ist $UV := \{uv : u \in U, v \in V\} \leq G$.

(4) Seien $U, V \leq G$. Es ist $U \cap V \leq G$.

Aufgabe 23 Sei $Z := \langle \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rangle \leq \text{GL}_2(\mathbb{F}_5) =: G$.

(1) Man zeige: $Z \trianglelefteq G$.

(2) Sei $P := \text{PGL}_2(\mathbb{F}_5) := G/Z$. Für $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ schreiben wir auch $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} Z \in P$.

Man zeige: $|\langle \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rangle| > |\langle \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rangle| > 1$.

(3) Man bestimme $|P|$.

(4) Sei $U := \langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rangle \leq P$. Ist $U \trianglelefteq P$? Ist P abelsch?

Teil (2) folgender Aufgabe ist die korrigierte Version von Aufgabe 12.(2).

Aufgabe 24

(1) Sei $\mathbb{Q}(X^2) := \left\{ \frac{u(X^2)}{v(X^2)} : u(X) \in \mathbb{Q}[X], v(X) \in \mathbb{Q}[X]^\times \right\}$.

Man zeige: Es ist $\mathbb{Q}(X^2)$ ein Teilring von $\mathbb{Q}(X)$. Jedes Element in $\mathbb{Q}(X^2)^\times$ hat ein multiplikativ Inverses in $\mathbb{Q}(X^2)$.

(2) Man finde $a, b, c \in \mathbb{F}_5$ mit

$$\frac{1}{X^3 + 2X^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X+2} \in \mathbb{F}_5(X).$$

Sind die Elemente a, b und c in \mathbb{F}_5 dadurch eindeutig bestimmt?