M. Truong, M. Künzer Abgabe bis Fr 27.05.2022

Algebra für Lehramt, SoSe 22

Blatt 5

Aufgabe 17

(1) Man finde in $\mathbb{Z}[X]$ Elemente $u(X)$ und $v(X)$ mit einem größten gemeinsamen Teiler $g(X)$, für welche gilt:
$$(u(X), v(X)) \subset (g(X)) .$$

(2) Ist $\mathbb{Z}[X]$ ein Hauptidealbereich?

Aufgabe 18

(1) In $\mathbb{Z}$ berechne man $\mathrm{ggT}(784, 910)$ mittels Euklidischem Algorithmus.

(2) In $\mathbb{Z}$ berechne man $\mathrm{ggT}(784, 910)$ mittels Primfaktorzerlegungen.

(3) In $\mathbb{F}_3[X]$ berechne man $\mathrm{ggT}(X^9 + X^3 + 1, X^4 + X^2 + X)$.

(4) In $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ berechne man einen größten gemeinsamen Teiler von 2 und $\mathrm{i} - 3$.

Aufgabe 19 Man zeige oder widerlege.

(1) Sei R ein faktorieller Integritätsbereich. Seien $x,\ y \in R^\times$.
Es sind x und y assoziiert genau dann, wenn $\mathrm{v}_p(x) = \mathrm{v}_p(y)$ ist für alle primen $p \in R$.

(2) Sei R ein faktorieller Integritätsbereich. Sei $f(X) \in R[X]$. Sei $g \in R$ ein größter gemeinsamer Teiler der Koeffizienten von $f(X)$.
Es ist $f(X)$ genau dann primitiv, wenn $g \in \mathrm{U}(R)$ ist.

(3) Sei R ein faktorieller Integritätsbereich. Sei $K := \mathrm{Quot}(R)$. Seien $f(X),\ g(X) \in R[X]$.
Genau dann ist $f(X)$ in $R[X]$ ein Teiler von $g(X)$,
wenn $f(X)$ in $K[X]$ ein Teiler von $g(X)$ ist.

(4) Sei $R = \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$. Es ist $R[X]$ ein Hauptidealbereich.

Aufgabe 20

(1) In S_5 berechne man $(1, 2, 4)(3, 5) \circ (1, 5, 3, 4)$.

(2) In S_5 berechne man $(1, 3, 5) \circ (2, 3, 4)(1, 5) \circ (1, 3, 5)^{-1}$.

(3) In S_5 bestimme man $\{\, (1, 2, 3, 4)^k \,:\, k \in \mathbb{Z} \,\}$.

(4) Man gebe die Primfaktorzerlegung von $|\,\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_3)|$ an.