M. Truong, M. Künzer Abgabe bis Fr 20.05.2022

Algebra für Lehramt, SoSe 22

Blatt 4

Aufgabe 13 Man zeige oder widerlege.

Sei R ein Integritätsbereich. Sei $a \in R^\times \smallsetminus \mathrm{U}(R) \subseteq R$ prim.

(1) Es ist $R/(a)$ ein Körper.

(2) Ist $R/(a)$ endlich als Menge, dann ist $R/(a)$ ein Körper.

(3) Es ist $b := a^2$ nicht prim.

(4) Sei $u \in \mathrm{U}(R)$. Es ist $u \cdot a \in R^\times \smallsetminus \mathrm{U}(R)$ prim.

Aufgabe 14 Sei R ein faktorieller Integritätsbereich. Sei $K := \mathrm{Quot}(R)$. Sei $p \in R$ prim.

Man zeige.

(1) Seien $x,\, y \in R^\times$. Sei $g \in R^\times$ ein größter gemeinsamer Teiler von x und y.
Sei $a \in R^\times$ ein Teiler von x und y.
Dann ist a ein Teiler von g. Ferner ist $\frac{g}{a}$ ein größter gemeinsamer Teiler von $\frac{x}{a}$ und $\frac{y}{a}$.

(2) Seien $x,\, y \in K$. Es ist $\mathrm{v}_p(x \cdot y) = \mathrm{v}_p(x) + \mathrm{v}_p(y)$.

(3) Seien $x,\, y \in K$. Es ist $\mathrm{v}_p(x + y) \geqslant \min\{\, \mathrm{v}_p(x),\, \mathrm{v}_p(y)\,\}$.
Falls $\mathrm{v}_p(x) \neq \mathrm{v}_p(y)$, dann ist $\mathrm{v}_p(x + y) = \min\{\, \mathrm{v}_p(x),\, \mathrm{v}_p(y)\,\}$.

Aufgabe 15

(1) In $\mathbb{Z}$ berechne man $\mathrm{v}_2(600)$.

(2) Man finde ein $x \in \mathbb{Z}^\times$ mit $\mathrm{v}_3(x) = 4$ und $\mathrm{v}_2(x) = 1$. Ist x dadurch eindeutig bestimmt?

(3) Man finde $x,\, y \in \mathbb{Z}^\times$ mit $\mathrm{v}_3(x + y) - \min\{\mathrm{v}_3(x), \mathrm{v}_3(y)\} = 2$.

(4) Man finde $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ mit $\mathrm{v}_X(f(X)) < \mathrm{v}_{X^2+1}(f(X)) < \mathrm{v}_X(f(X)^2)$.

Aufgabe 16

(1) Man zeige: Es ist $(X, Y) \subseteq \mathbb{Q}[X, Y]$ kein Hauptideal; folglich ist $\mathbb{Q}[X, Y]$ kein Hauptidealbereich.

(2) Sei $R := \mathbb{F}_2[X]$. Man bestimme alle irreduziblen Elemente in $R^\times \smallsetminus \mathrm{U}(R)$ von Grad $\leqslant 3$.