M. Truong, M. Künzer Abgabe bis Fr 13.05.2022

Algebra für Lehramt, SoSe 22

Blatt 3

Aufgabe 9 Sei $\zeta := \zeta_3 := \exp(2\pi\mathrm{i}/3) \in \mathbb{C}$.

(1) Man bestimme $(\zeta - 1)(\zeta^2 + \zeta + 1)$. Man folgere: $\zeta^2 + \zeta + 1 = 0$.
Man berechne $|x + y\zeta|^2$ für $x,\, y \in \mathbb{R}$.

(2) Man zeige: Es ist $\mathbb{Z}[\zeta] := \{\, a + b\zeta \,:\, a,\, b \in \mathbb{Z}\,\} \subseteq \mathbb{C}$ ein Teilring.

(3) Seien $x,\, y \in \mathbb{R}$. Seien $a,\, b \in \mathbb{Z}$ gewählt mit $|x - a| \leqslant \frac{1}{2}$ und $|y - b| \leqslant \frac{1}{2}$. Man zeige:

$$|(x + y\zeta) - (a + b\zeta)|^2 \;\leqslant\; \frac{3}{4}\,.$$

(4) Sei $d : \mathbb{Z}[\zeta]^\times \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0} : z \mapsto d(z) := |z|^2$.
Man zeige: d ist eine Gradfunktion und folglich $\mathbb{Z}[\zeta]$ ein euklidischer Ring.

Aufgabe 10

(1) Man finde $q,\, r \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ mit $2 - 3\mathrm{i} = (1 + 2\mathrm{i})q + r$, wobei $|r|^2 < |1 + 2\mathrm{i}|^2$.

(2) Man zeige: Für $u \in \mathrm{U}(\mathbb{Z}[\mathrm{i}])$ ist $|u|^2 \in \mathrm{U}(\mathbb{Z})$. Man bestimme $\mathrm{U}(\mathbb{Z}[\mathrm{i}])$.

(3) Sei $\zeta := \zeta_3 := \exp(2\pi\mathrm{i}/3) \in \mathbb{C}$.
Man finde $q,\, r \in \mathbb{Z}[\zeta]$ mit $2 - 3\zeta = (1 + 2\zeta)q + r$, wobei $|r|^2 < |1 + 2\zeta|^2$.

Aufgabe 11

(1) Wir betrachten das Ideal $(8, 20, 36) \subseteq \mathbb{Z}$. Man finde ein $z \in \mathbb{Z}$ mit $(z) = (8, 20, 36)$.

(2) Man finde zwei Elemente $f(X),\, g(X) \in \mathbb{Z}[X]$ mit
$(f(X)) \subset (f(X), g(X))$ und $(g(X)) \subset (f(X), g(X))$.

(3) Man zeige folgende Gleichheit von Idealen in $\mathbb{Q}[X, Y]$.

$$(X^2 + Y,\; X + Y^2) \;=\; (Y - XY^2,\; X - YX^2,\; X^2 + XY^2)\,.$$

Aufgabe 12

(1) Sei R ein Integritätsbereich.
Man verifiziere: In $K := \mathrm{Quot}(R)$ gilt (Ring 2), also das Assoziativgesetz der Addition.

(2) Man finde $a,\, b,\, c \in \mathbb{F}_5$ mit

$$\frac{1}{X^3 + 2X^2} \;=\; \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X + 2} \;\in\; \mathbb{F}_5(X)\,.$$

Sind die Elemente a, b und c in $\mathbb{F}_5$ dadurch eindeutig bestimmt?