M. Truong, M. Künzer Abgabe bis Fr 29.04.2022

Algebra für Lehramt, SoSe 22

Blatt 1

Aufgabe 1 Wir betrachten den Teilring $R := \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ \mathbb{Q} & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ 0 & 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ \mathbb{Q} & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ \mathbb{Q} & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \end{pmatrix} = \mathbb{Q}^{3\times 3}$.
Wir betrachten dazuhin den Ring $S := \mathbb{Q}^{2\times 2} \times \mathbb{Q}$.

(1) Man finde ein Linksideal in R, das kein Ideal in R ist.

(2) Man bestimme einen Ringmorphismus $\varphi : R \to S$, für welchen gilt: $\mathrm{U}(R) = \varphi^{-1}(\mathrm{U}(S))$.

Aufgabe 2

(1) Man erstelle die Multiplikationstafel von $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

(2) Man bestimme $\{\, x \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \,:\, x^2 - 1 = 0 \,\}$.

(3) Ist $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ ein Körper? Man entscheide anhand (1).

Aufgabe 3

(1) Sei $f(X) := X^4 + \frac{2}{3}X^3 - \frac{10}{3}X^2 - 2X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$.
Man bestimme alle Nullstellen von $f(X)$, die in $\mathbb{Q}$ liegen.

(2) Man zeige unter Verwendung des Satzes von Descartes: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Aufgabe 4

(1) Man zeige: $\mathrm{U}(\mathbb{Z}) \subset \mathrm{U}(\mathbb{Z}_{(5)}) \subset \mathrm{U}(\mathbb{Q})$.
Hierbei heiße $(M \subset N) :\Leftrightarrow (M \subseteq N \wedge M \neq N)$.

(2) Man zeige unter Verwendung der Multiplikationstafel von $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$:
Für jedes $v \in \mathbb{Z}$ mit $v \not\equiv_5 0$ gibt es ein $w \in \mathbb{Z}$ mit $wv \equiv_5 1$.

(3) Wir betrachten den injektiven Ringmorphismus

$$\varphi \;:\; \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \;\to\; \mathbb{Z}_{(5)}/5\mathbb{Z}_{(5)} \;:\; z + 5\mathbb{Z} \;\mapsto\; z + 5\mathbb{Z}_{(5)} \;.$$

Man zeige unter Verwendung von (2): Es ist φ ein Ringisomorphismus.

(4) Seien R und S Ringe.
Sei $\varphi : R \to S$ ein Ringisomorphismus, d.h. ein bijektiver Ringmorphismus.
Man zeige: $\varphi^{-1} : S \to R$ ist ein Ringisomorphismus.