Aufgabe 9 (2 Punkte)

Man gebe bis auf Isomorphie alle abelschen Gruppen der Ordnung 125 an:

$$\mathrm{C}_{125}\,,\ \mathrm{C}_{25}\times\mathrm{C}_5\,,\ \mathrm{C}_5\times\mathrm{C}_5\times\mathrm{C}_5$$

Aufgabe 10 (3 Punkte)

Wir betrachten die Elemente $6-3\mathrm{i}$ und $3+\mathrm{i}$ in $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$.

(a) Man bestimme $q,\ r\in\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ mit $6-3\mathrm{i}=(3+\mathrm{i})\cdot q+r$ und mit $|r|^2<|3+\mathrm{i}|^2$.

$q=$ $1-\mathrm{i}$ $r=$ $2-\mathrm{i}$

(b) Man bestimme einen größten gemeinsamen Teiler g von $6-3\mathrm{i}$ und $3+\mathrm{i}$ in $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$.

$g=$ $2-\mathrm{i}$

Aufgabe 11 (4 Punkte)

Sei $U:=\{\left(\begin{smallmatrix}1&a\\0&1\end{smallmatrix}\right)\ :\ a\in\mathbb{F}_3\}\subseteq\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)=:G$.

(a) Es ist $|G|=$ 48.

(b) Für $a,\ b\in\mathbb{F}_3$ ist $\left(\begin{smallmatrix}1&a\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot\left(\begin{smallmatrix}1&b\\0&1\end{smallmatrix}\right)^{-1}=$ $\left(\begin{smallmatrix}1&a-b\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. Folglich ist $U\leqslant G$.

(c) Es ist $|U|=$ 3.

(d) Sei $V\leqslant G$ mit $|V|=3$ gegeben. Gibt es ein $g\in G$ mit ${}^gU=V$? Begründen Sie.

Es ist $|G|=48=3\cdot 16$. Wegen $|U|=3=|V|$ sind $U,\ V\ \in\ \mathrm{Syl}_3(G)$.
Also gibt es ein $g\in G$ mit ${}^gU=V$.

Name, Vorname: **Matrikel-Nummer:**

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	Summe	Note
Punkte	/3	/3	/2	/2	/2	/3	/4	/2	/2	/3	/4	/ 30	

Algebra für Lehramt

Scheinklausur

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- Die Ergebnisse sind in die vorgesehenen Kästen einzutragen.
  Begründungen sind nur anzugeben, falls in der Aufgabe verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (3 Punkte)

(a) Man bestimme ein $x\in\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ mit $x\neq 1$ und $x^3=1$.

$x=$ 4

(b) Man berechne: $\mathrm{v}_3(36)=$ 2

(c) Man bestimme ein $a\in\mathbb{Z}$ mit $4\mathbb{Z}\cap a\mathbb{Z}=12\mathbb{Z}$ und $4\mathbb{Z}+a\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$.

$a=$ 3

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Man bestimme a, b, $c \in \mathbb{F}_3$ mit

$$\frac{1}{X^3 - X} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+1} \in \mathbb{F}_3(X) .$$

$a = \boxed{-1}$ $b = \boxed{-1}$ $c = \boxed{-1}$

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Wir betrachten das Ideal $I := (X^2 - Y,\, X - Y^2) \subseteq \mathbb{Q}[X, Y]$.

Ist $X^3 - Y^3 \in I$? Man begründe:

Es ist $X^3 - Y^3 = X(X^2 - Y) + Y(X - Y^2) \in (X^2 - Y,\, X - Y^2) = I$.

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$. Man bestimme eine Matrix $D \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$ in Elementarteilerform, für welche es $S, T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ gibt mit $SAT = D$.

$D = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}}$

Aufgabe 5 (2 Punkte)

(a) Man gebe einen Hauptidealbereich R an, der kein Körper ist.

$R = \boxed{\mathbb{Z}}$

(b) Man gebe einen Integritätsbereich S an, der kein Hauptidealbereich ist.

$S = \boxed{\mathbb{Z}[X]}$

Scheinklausur Algebra für Lehramt Montag 25.07.2022

Aufgabe 6 (3 Punkte)

(a) Sei $f := (1, 2, 3, 4) \in \mathrm{S}_4$.

Man bestimme die Untergruppe $U := \langle\, f \,\rangle \leqslant \mathrm{S}_4$ durch Angabe ihrer Elemente.

$U = \{\ \mathrm{id},\ (1,2,3,4),\ (1,3)(2,4),\ (1,4,3,2)\ \}$

(b) Man bestimme ein Element $g \in \mathrm{S}_4$ mit ${}^g f = f^3$.

$g = \boxed{(2, 4)}$

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Man zeige oder widerlege die angegebene Aussage.

(a) Sei G eine Gruppe. Sei $N \trianglelefteq G$. Sei N zyklisch. Sei G/N zyklisch. Dann ist G zyklisch.

Die Aussage ist falsch.
Z.B. ist für $G = \mathrm{S}_3$ und $N = \mathrm{A}_3 \trianglelefteq \mathrm{S}_3 = G$ zum einen $N \simeq \mathrm{C}_3$ und $G/N \simeq \mathrm{C}_2$, zum anderen ist G nicht zyklisch, da es in G kein Element der Ordnung 6 gibt.

(b) Sei G eine Gruppe. Seien $a, b \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$. Sei $g \in G$ ein Element mit $|\langle g \rangle| = ab$. Dann ist $|\langle g^a \rangle| = b$.

Die Aussage ist richtig.
Sei $m := |\langle g^a \rangle| \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ die Ordnung von g^a. Da $(g^a)^b = 1$ ist, ist m ein Teiler von b. Desweiteren ist $(g^a)^m = g^{am} = 1$. Also ist ab ein Teiler von am. Also ist b ein Teiler von m. Somit ist $b = m$.

Aufgabe 8 (2 Punkte)

Sei G eine Gruppe mit $|G| = 72$.

Dann ist $|\,\mathrm{Syl}_3(G)| = \boxed{1}$ oder $|\,\mathrm{Syl}_3(G)| = \boxed{4}$.