Klausur zur Algebra für Lehramt

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- **Antworten sind zu begründen.** Nachvollziehbare Rechnungen zählen als Begründungen.
- Es sind insgesamt 40 Punkte erreichbar.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **01.10.2022** im Campus-System bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Wer diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreibt, wird darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen dafür mit dem Prüfer bis zum **15.10.2022** einen Termin vereinbaren. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (2+1+2 Punkte)

(1) Untersuchen Sie unter Verwendung des Satzes von Descartes, ob das Polynom $X^3+X+3 \in \mathbb{Z}[X]$ eine Nullstelle in $\mathbb{Q}$ hat.

(2) Folgern Sie aus (1): Es ist $X^3 + X + 3$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.

(3) Zeigen Sie: Es ist $X^9 + 6X + 3$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.

Aufgabe 2 (1+2+1 Punkte)

(1) Man bestimme einen Ringisomorphismus φ von $\mathbb{Z}/(15)$ nach $\mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(5)$.

(2) Man bestimme zu φ aus (1) eine Abbildungsvorschrift für $\varphi^{-1} : \mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(5) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/(15)$.

(3) Man finde Elemente $e,\ f\ \in\ (\mathbb{Z}/(15))^\times$ mit $e + f = 1$ und $e^2 = e$ und $f^2 = f$.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Man bestimme $x,\ y\ \in\ \mathbb{Z}$ mit

$$\mathrm{v}_5(x + y)\ >\ \min\{\mathrm{v}_5(x), \mathrm{v}_5(y)\}\ >\ 0\ .$$

Aufgabe 4 (2+1+1 Punkte)

Wir betrachten S_4 als S_4-Menge via Konjugation.

(1) Man bestimme $\mathrm{Stab}_{\mathrm{S}_4}\big((1, 2, 4)\big) = \mathrm{C}_{\mathrm{S}_4}\big((1, 2, 4)\big)$.

(2) Man bestimme $|\,{}^{\mathrm{S}_4}(1, 2, 4)|$ unter Verwendung des Bahnenlemmas.

(3) Man bestimme $\{\, f \in {}^{\mathrm{S}_4}(1, 2, 4)\ :\ f(1) = 3\,\}$.

Aufgabe 5 (2+2+2 Punkte)

Man zeige oder widerlege.

(1) Jede Gruppe G mit $|G| = 45$ besitzt einen Normalteiler der Ordnung 5 und einen Normalteiler der Ordnung 9.

(2) Jede Gruppe G mit $|G| = 45$ ist abelsch.

(3) Jede Gruppe G mit $|G| = 45$ enthält ein Element der Ordnung 9.

Aufgabe 6 (2 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 9 & 11 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 2}$.

Man bestimme eine Matrix $D \in \mathbb{Z}^{3\times 2}$ in Elementarteilerform, für welche es $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$ und $T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ gibt mit $SAT = D$.

Die Matrizen S und T brauchen nicht ausgerechnet zu werden.

Bitte wenden →

Aufgabe 7 (1+2+3+1+1+2 Punkte)

(1) Man bestimme alle irreduziblen Polynome von Grad 2 in $\mathbb{F}_2[X]$.

(2) Man zeige: Es ist $X^5 + X^2 + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$ irreduzibel.

(3) Man konstruiere einen Körper $\mathbb{F}_{32}$ mit 32 Elementen.
Man gebe eine $\mathbb{F}_2$-lineare Basis von $\mathbb{F}_{32}$ an.

Sind die Ringe $\mathbb{F}_{32}$ und $\mathbb{Z}/(32)$ zueinander isomorph?

(4) Sei $u \in \mathrm{U}(\mathbb{F}_{32})$ mit $u \neq 1$ gegeben. Man bestimme die Ordnung von u.

Wieso müssen dazu die Potenzen von u nicht berechnet werden?

(5) Sei $y \in \mathbb{F}_{32}$ mit $y \notin \{0, 1\}$ gegeben. Man bestimme $\deg(\mu_{y,\mathbb{F}_2}(X))$.

(6) Sei $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_{32}|\mathbb{F}_2)$ die Gruppe der Automorphismen von $\mathbb{F}_{32}$ über $\mathbb{F}_2$.

Man gebe einen Automorphismus $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_{32}|\mathbb{F}_2)$ an mit $\varphi \neq \mathrm{id}_{\mathbb{F}_{32}}$.

Man bestimme die Ordnung von φ in $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_{32}|\mathbb{F}_2)$.

Aufgabe 8 (1+3+1+2 Punkte)

(1) Man bestimme $\Phi_1(X) \cdot \Phi_5(X)$ und $\Phi_1(X) \cdot \Phi_5(X) \cdot \Phi_{25}(X)$.

(2) Man bestimme das Kreisteilungspolynom $\Phi_{25}(X)$.

(3) Man bestimme den Körpergrad $[\mathbb{Q}(\zeta_{25}) : \mathbb{Q}]$.

(4) Gibt es einen Zwischenkörper Z mit $\mathbb{Q}(\zeta_{25}) \,|\, Z \,|\, \mathbb{Q}$ und mit $[Z : \mathbb{Q}] = 8$?
