M. Truong, M. Künzer

Algebra für Lehramt, SoSe 22

Lösung 9

Aufgabe 33 Sei G eine endliche Gruppe. Sei p eine Primzahl. Sei $|G| \equiv_p 0$.
Wir wollen zeigen: Sylow (Satz 154) impliziert Cauchy (Lemma 151). In der Lösung sollte also kein direkter Gebrauch von Lemma 151 gemacht werden.

(1) Man zeige: In G gibt es eine p-Untergruppe U mit $U \neq 1$.

(2) Man folgere aus (1): Es gibt in G ein Element x von Ordnung p^c für ein $c \geqslant 1$.

(3) Man folgere aus (2): Es gibt in G ein Element y von Ordnung p.

(4) Man zeige oder widerlege: Sei H eine endliche Gruppe. Sei $s \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2}$. Sei $|H| \equiv_s 0$.
Es gibt in H ein Element von Ordnung s .

Lösung.
Zu (1). Wir schreiben $|G| = p^a \cdot m$ mit $a \geqslant 0$ und $m \not\equiv_p 0$. Wegen $|G| \equiv_p 0$ ist $a \geqslant 1$.
Wir wählen $U \in \operatorname{Syl}_p(G)$. Es ist $|U| = p^a$. Da $a \geqslant 1$ ist, ist U eine p-Untergruppe von G mit $U \neq 1$.

Zu (2). Wir wählen $x \in U \smallsetminus \{1\}$. Es ist $|\langle x\rangle|$ ein Teiler von $|U| = p^a$, der ungleich 1 ist. Also ist $|\langle x\rangle| = p^c$ für ein $c \geqslant 1$.

Zu (3). Sei $y := x^{p^{c-1}}$.
Dann ist $y^p = x^{p^{c-1}\cdot p} = x^{p^c} = 1$.
Und für $d \in [1, p-1]$ ist $y^d = x^{p^{c-1}\cdot d} \neq 1$, da $p^{c-1} \cdot d \in [1, p^c - 1]$.
Also ist $|\langle y\rangle| = p$.
Die Existenz eines Elements von Ordnung p in G ist die Aussage des Satzes von Cauchy.

Zu (4). Die Aussage ist falsch.
Sei z.B. $H := \mathrm{S}_3$. Sei $s := 6$. Dann ist $|H| \equiv_s 0$.
Aber es gibt in $H = \mathrm{S}_3$ nur Elemente der Ordnungen 1, 2 und 3, und kein Element der Ordnung 6.
Alternativ kann man anführen, daß die Existenz eines Elements von Ordnung 6 in H zur Folge hätte, daß die Gruppe H isomorph zu C_6 und somit abelsch wäre, was sie nicht ist.

Aufgabe 34 Seien p und q Primzahlen mit $p < q$. Sei $q - 1 \not\equiv_p 0$.
Sei G eine Gruppe von Ordnung $|G| = p \cdot q$.

(1) Man zeige: Es gibt in G eine normale q-Sylowgruppe.

(2) Man zeige: Es gibt in G eine normale p-Sylowgruppe.

(3) Sei $H := \{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{smallmatrix}\right) \,:\, x \in \mathbb{F}_7 ,\ y \in \mathbb{F}_7^\times ,\ y^3 = 1 \} \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_7)$.

 (a) Man zeige: H ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_7)$ mit $|H| = 3 \cdot 7$.
 (b) Man zeige: In H gibt es eine 3-Sylowgruppe, die kein Normalteiler in H ist.

Lösung.
Zu (1). Es ist $|\operatorname{Syl}_q(G)| \equiv_q 1$ und es ist $|\operatorname{Syl}_q(G)|$ ein Teiler von $|G|/q = p$. Also ist $|\operatorname{Syl}_q(G)| \in \{1, p\}$.
Wäre $|\operatorname{Syl}_q(G)| = p$, dann wäre $p \equiv_q 1$, also $(p-1) \equiv_q 0$. Wegen $p - 1 \in [0, q-1]$ hat das aber $p - 1 = 0$ zur Folge, also $p = 1$, *was nicht stimmt.*
Also ist $|\operatorname{Syl}_q(G)| = 1$. Folglich gibt es eine normale q-Sylowgruppe in G.

Zu (2). Es ist $|\operatorname{Syl}_p(G)| \equiv_p 1$ und es ist $|\operatorname{Syl}_p(G)|$ ein Teiler von $|G|/p = q$. Also ist $|\operatorname{Syl}_p(G)| \in \{1, q\}$.
Wäre $|\operatorname{Syl}_p(G)| = q$, dann wäre $q \equiv_p 1$, also $(q-1) \equiv_p 0$. Das ist aber *nicht der Fall.*
Also ist $|\operatorname{Syl}_p(G)| = 1$. Folglich gibt es eine normale p-Sylowgruppe in G.

Sei noch angemerkt, daß $p \neq 2$ ist, da wegen $p < q$ die Primzahl q ungerade und also $q - 1 \equiv_2 0$ ist.

Zu (3).
Zu (a). Seien $x, \tilde{x} \in \mathbb{F}_7$ gegeben. Seien $y, \tilde{y} \in \mathbb{F}_7$ mit $y^3 = \tilde{y}^3 = 1$ gegeben. Dann wird

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \tilde{x} \\ 0 & \tilde{y} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{x}\tilde{y}^{-1} \\ 0 & \tilde{y}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (x-\tilde{x})\tilde{y}^{-1} \\ 0 & y\tilde{y}^{-1} \end{pmatrix} ,$$

wobei $(y\tilde{y}^{-1})^3 = y^3 \cdot (\tilde{y}^3)^{-1} = 1$.
Folglich ist $H \leqslant \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_7)$.
Ferner ist $\{ y \in \mathbb{F}_7^\times : y^3 = 1 \} = \{1, 2, 4\}$ und also $|H| = |\mathbb{F}_7| \cdot |\{ y \in \mathbb{F}_7^\times : y^3 = 1 \}| = 7 \cdot 3 = 21$.
Zu (b). Sei $U := \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} : y \in \mathbb{F}_7^\times,\ y^3 = 1 \} \subseteq H$.
Seien $y, \tilde{y} \in \mathbb{F}_7$ mit $y^3 = \tilde{y}^3 = 1$ gegeben. Dann wird

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{y} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{y}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y\tilde{y}^{-1} \end{pmatrix} ,$$

wobei $(y\tilde{y}^{-1})^3 = y^3 \cdot (\tilde{y}^3)^{-1} = 1$.
Folglich ist $U \leqslant H$.
Es ist $|U| = |\{ y \in \mathbb{F}_7^\times : y^3 = 1 \}| = 3$. Also ist $U \in \mathrm{Syl}_3(H)$.
Es ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in U$. Es ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$. Aber es ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \not\in U .$$

Also ist U kein Normalteiler in H.

Sei noch angemerkt, daß dies nicht im Widerspruch zu (2) steht, da hier $7 - 1 \equiv_3 0$ ist.

Aufgabe 35

(1) Sei G eine Gruppe von Ordnung $|G| = 40$, die keine normale 2-Sylowgruppe enthält.
Man bestimme $|\,\mathrm{Syl}_2(G)|$ und $|\,\mathrm{Syl}_5(G)|$.

(2) Sei G eine Gruppe von Ordnung $|G| = 225$, die keine normale 3-Sylowgruppe enthält.
Man bestimme $|\,\mathrm{Syl}_3(G)|$ und $|\,\mathrm{Syl}_5(G)|$.

Lösung.
Zu (1).
Es ist $|\,\mathrm{Syl}_2(G)| \equiv_2 1$ und $|\,\mathrm{Syl}_2(G)| \mid 5$ und, da in G keine normale 2-Sylowgruppe enthalten ist, $|\,\mathrm{Syl}_2(G)| \neq 1$.
Also ist $|\,\mathrm{Syl}_2(G)| = 5$.
Es ist $|\,\mathrm{Syl}_5(G)| \equiv_5 1$ und $|\,\mathrm{Syl}_5(G)| \mid 8$, d.h. $|\,\mathrm{Syl}_5(G)| \in \{1, 2, 4, 8\}$. Also ist $|\,\mathrm{Syl}_2(G)| = 1$.

Zu (2).
Es ist $|\,\mathrm{Syl}_3(G)| \equiv_3 1$ und $|\,\mathrm{Syl}_3(G)| \mid 25$ und, da in G keine normale 3-Sylowgruppe enthalten ist, $|\,\mathrm{Syl}_3(G)| \neq 1$.
Also ist $|\,\mathrm{Syl}_3(G)| = 25$.
Es ist $|\,\mathrm{Syl}_5(G)| \equiv_5 1$ und $|\,\mathrm{Syl}_5(G)| \mid 9$, d.h. $|\,\mathrm{Syl}_5(G)| \in \{1, 3, 9\}$. Also ist $|\,\mathrm{Syl}_3(G)| = 1$.

Aufgabe 36 Wir betrachten die Elemente $g_1 := (1,2)(3,4)$, $g_2 := (1,3)(2,4)$, $g_3 := (1,4)(2,3)$ in S_4. Es ist $X := \{g_1, g_2, g_3\}$ eine Konjugationsklasse in S_4. Es ist $V := \{\mathrm{id}\} \sqcup X$ eine abelsche Untergruppe von S_4.

(1) Sei $\psi : \mathrm{S}_3 \to \mathrm{S}_X : f \mapsto (g_i \mapsto g_{f(i)})$. Man zeige: Es ist ψ ein Gruppenisomorphismus.

(2) Wir haben die Operation von S_4 auf der Konjugationsklasse X. Dies liefert einen Operationsmorphismus $\varphi : \mathrm{S}_4 \to \mathrm{S}_X$.
Sei $\alpha := \psi^{-1} \circ \varphi : \mathrm{S}_4 \to \mathrm{S}_3$. Man zeige: Es ist α ein surjektiver Gruppenmorphismus.

(3) Man zeige: Es ist $\operatorname{Kern}(\alpha) = V$.

Lösung.
Zu (1). Wir zeigen, daß ψ ein Gruppenmorphismus ist. Seien $f,\, \tilde{f} \in \mathrm{S}_3$. Wir haben $\psi(f \circ \tilde{f}) = \psi(f) \circ \psi(\tilde{f})$ zu zeigen. Sei $i \in [1,3]$. Dann wird in der Tat

$$(\psi(f) \circ \psi(\tilde{f}))(g_i) \;=\; (\psi(f))((\psi(\tilde{f}))(g_i)) \;=\; (\psi(f))(g_{\tilde{f}(i)}) \;=\; g_{f(\tilde{f}(i))} \;=\; g_{(f\circ\tilde{f})(i)} \;=\; (\psi(f \circ \tilde{f}))(g_i)\,.$$

Wir zeigen, daß ψ injektiv ist. In der Tat ist $f \in \mathrm{S}_3$ im Kern von ψ, wenn $g_i = (\psi(f))(g_i) = g_{f(i)}$ ist für $i \in [1,3]$, d.h. wenn $i = f(i)$ ist für $i \in [1,3]$, d.h. wenn $f = \mathrm{id}$ ist. Folglich ist $\operatorname{Kern}(\psi) = 1$. Damit ist ψ injektiv.

Da nun $|\mathrm{S}_3| = 6 = |\mathrm{S}_X|$ ist, folgt, daß ψ bijektiv ist.

Insgesamt ist ψ ein Gruppenisomorphismus.

Zu (2). Sei $f = (1,2)$. Es ist ${}^{f}g_1 = (2,1)(3,4) = g_1$. Es ist ${}^{f}g_2 = (2,3)(1,4) = g_3$. Es ist ${}^{f}g_3 = (2,4)(1,3) = g_2$. Also ist $\varphi(f) = \psi((2,3))$. Also ist $\alpha(f) = \psi^{-1}(\varphi(f)) = (2,3)$.

Sei $\tilde{f} = (2,3)$. Es ist ${}^{\tilde{f}}g_1 = (1,3)(2,4) = g_2$. Es ist ${}^{\tilde{f}}g_2 = (1,2)(3,4) = g_1$. Es ist ${}^{\tilde{f}}g_3 = (1,4)(3,2) = g_3$. Also ist $\varphi(\tilde{f}) = \psi((1,2))$. Also ist $\alpha(\tilde{f}) = \psi^{-1}(\varphi(f)) = (1,2)$.

Somit ist $\mathrm{S}_3 = \langle (2,3), (1,2) \rangle = \langle \alpha(f), \alpha(\tilde{f}) \rangle \leqslant \alpha(\mathrm{S}_4) \leqslant \mathrm{S}_3$ und folglich $\alpha(\mathrm{S}_4) = \mathrm{S}_3$. D.h. der Gruppenmorphismus α ist surjektiv.

Zu (3). Nach Homomorphiesatz ist $\mathrm{S}_4 / \operatorname{Kern}(\alpha) \simeq \mathrm{S}_3$.

Insbesondere ist $|\mathrm{S}_4| / |\operatorname{Kern}(\alpha)| = |\mathrm{S}_3|$. Es folgt $|\operatorname{Kern}(\alpha)| = |\mathrm{S}_4|/|\mathrm{S}_3| = 24/6 = 4$.

Sei $i \in [1,3]$. Es ist ${}^{g_i}g_j = g_j$ für $j \in [1,3]$, da V abelsch ist. Also ist $\varphi(g_i) = \psi(\mathrm{id})$. Also ist $\alpha(g_i) = \psi^{-1}(\varphi(g_i)) = \mathrm{id}$. Somit ist $g_i \in \operatorname{Kern}(\alpha)$.

Da sowieso $\mathrm{id} \in \operatorname{Kern}(\alpha)$, ist damit $V \leqslant \operatorname{Kern}(\alpha)$.

Da $|V| = 4 = |\operatorname{Kern}(\alpha)|$, folgt $V = \operatorname{Kern}(\alpha)$.