M. Truong, M. Künzer

Algebra für Lehramt, SoSe 22

Blatt 7

Aufgabe 25 Sei $V := \langle (1,2)(3,4),\ (1,3)(2,4)\rangle \trianglelefteq \mathrm{S}_4$.

(1) Ist $\mathrm{S}_3/\mathrm{A}_3$ eine abelsche Gruppe?

(2) Ist A_4/V eine abelsche Gruppe?

(3) Ist S_4/V eine abelsche Gruppe?

Lösung.
Zu (1). Es ist $\mathrm{S}_3/\mathrm{A}_3 = \{\mathrm{id}\,\mathrm{A}_3, (1,2)\mathrm{A}_3\} = \langle (1,2)\mathrm{A}_3\rangle$ als zyklische Gruppe abelsch.

Zu (2). Es ist $|\mathrm{A}_4/V| = 3$. Wenn wir also in A_4/V ein Element der Ordnung 3 finden, dann erzeugt es bereits diese Gruppe.
Sei $x := (1,2,3)V$. Es ist $x^2 = (1,3,2)V$. Es ist $x^3 = \mathrm{id}\,V$. Das minimale $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ mit $x^k = \mathrm{id}$ ist also $k = 3$. Somit ist $\mathrm{A}_4/V = \langle x\rangle$.
Als zyklische Gruppe ist A_4/V abelsch.

Zu (3). Nein, S_4/V ist keine abelsche Gruppe. Denn z.B. mit $y := (1,2)V$ und $z := (2,3)V$ ist

$$yzy^{-1}z^{-1} \;=\; (1,2)(2,3)(1,2)(2,3)V \;=\; (1,3,2)V \;\neq\; \mathrm{id}\,V\ ,$$

da $(1,3,2) \notin V = \{\,\mathrm{id},\ (1,2)(3,4),\ (1,3)(2,4),\ (1,4)(2,3)\,\}$.

Aufgabe 26

(1) Man berechne ${}^{(1,2,3,4)}(1,3,5)(2,4)$ in S_5 .

(2) Sei $x := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Man berechne ${}^{x}\!\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$.

(3) Man berechne $\{\,\sigma \in \mathrm{S}_4\ :\ {}^{\sigma}(1,2)(3,4) = (1,2)(3,4)\,\}$.

Lösung.
Zu (1). Nach Konjugationsregel in der symmetrischen Gruppe wird das konjugierende Element auf die Zykeleinträge angewandt. Das gibt

$${}^{(1,2,3,4)}(1,3,5)(2,4) \;=\; (2,4,5)(3,1) \;=\; (1,3)(2,4,5)\ .$$

Zu (2). Es wird

$${}^{x}\!\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{smallmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)\ .$$

Zu (3). Es ist ${}^{\sigma}(1,2)(3,4) = (\sigma(1),\sigma(2))(\sigma(3),\sigma(4))$.
Dies ist genau dann gleich $(1,2)(3,4)$, wenn $\sigma(\{1,2\}) = \{1,2\}$ oder $\sigma(\{1,2\}) = \{3,4\}$ ist. Das liefert

$$\begin{array}{rl} & \{\,\sigma \in \mathrm{S}_4\ :\ {}^{\sigma}(1,2)(3,4) = (1,2)(3,4)\,\} \\ = & \{\mathrm{id},\ (1,2),\ (3,4),\ (1,2)(3,4),\ (1,3)(2,4),\ (1,4)(2,3),\ (1,3,2,4),\ (1,4,2,3)\} \\ = & \langle (1,2,3,4),\ (2,4)\rangle\ . \end{array}$$

Aufgabe 27

(1) Sei G eine Gruppe. Sei $x \in G$ mit $G = \langle x \rangle$ gegeben. Sei $|\langle x \rangle| = 10$.
Sei H eine Gruppe. Sei $y \in H$ mit $H = \langle y \rangle$ gegeben. Sei $|\langle y \rangle| = 4$.
Man bestimme alle Gruppenmorphismen von G nach H.

(2) Wir betrachten die Gruppen $\mathbb{C} = (\mathbb{C}, +)$ und $\mathbb{C}^\times = (\mathbb{C}^\times, \cdot)$.
Man zeige: Es ist $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ ein Gruppenmorphismus.
Man bestimme $\mathrm{Kern}(\exp)$.

Lösung.
Zu (1). Sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenmorphismus. Dann ist $\varphi(x)^{10} = \varphi(x^{10}) = \varphi(1) = 1$. Also ist $|\langle \varphi(x) \rangle|$ ein Teiler von 10.
In $H = \{1, y, y^2, y^3\}$ ist $|\langle 1 \rangle| = 1$, $|\langle y \rangle| = 4$, $|\langle y^2 \rangle| = 2$ und $|\langle y^3 \rangle| = 4$.
Also ist notwendigerweise $\varphi(x) = \{1, y\}$.
Das Bild von x unter φ legt den Gruppenmorphismus φ fest in dem Sinne, daß $\varphi(x^i) = \varphi(x)^i$ ist für $i \in \mathbb{Z}$. Also bleibt zu untersuchen, ob es jeweils einen Gruppenmorphismus mit Bild von x gleich 1 oder mit Bild von x gleich y gibt.
Es gibt den Gruppenmorphismus $\varphi_0 : G \to H : x^i \mapsto 1$.
Wir behaupten, daß es auch den Gruppenmorphismus

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi_1} & H \\ x^i & \mapsto & y^{2i} \end{array}$$

gibt, wobei $i \in \mathbb{Z}$.
Es ist φ_1 eine wohldefinierte Abbildung, da für $i,\, j \in \mathbb{Z}$ aus $x^i = x^j$ folgt, daß $i \equiv_{10} j$, woraus $2i \equiv_{20} 2j$, also $2i \equiv_4 2j$ und somit $y^{2i} = y^{2j}$ folgt.
Es ist $\varphi_1(x) = y^2$.
Es ist φ_1 ein Gruppenmorphismus, da für $i,\, j \in \mathbb{Z}$ sich

$$\varphi_1(x^i \cdot x^j) \;=\; \varphi_1(x^{i+j}) \;=\; y^{2(i+j)} \;=\; y^{2i} \cdot y^{2j} \;=\; \varphi_1(x^i) \cdot \varphi_1(x^j)$$

ergibt.
Ergebnis: Von G nach H gibt es die zwei Gruppenmorphismen φ_0 und φ_1 .

Zu (2). Wir zeigen, daß $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ ein Gruppenmorphismus ist. Dabei ist zu beachten, daß $\mathbb{C}$ additiv und $\mathbb{C}^\times$ multiplikativ geschrieben wird.
Seien $z,\, w \in \mathbb{C}$. Es ist $\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$.
Wir berechnen $\mathrm{Kern}(\exp) = \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, \exp(z) = 1 \,\}$. Sei $z \in \mathbb{C}$ gegeben.
Wir schreiben $z = a+b\mathrm{i}$ mit $a,\, b \in \mathbb{R}$. Es wird $\exp(z) = \exp(a+b\mathrm{i}) = \exp(a)\cdot\exp(b\mathrm{i}) = \exp(a)\cdot(\cos(b)+\mathrm{i}\sin(b))$.
Insbesondere wird $|\exp(z)| = |\exp(a)| \cdot |\cos(b) + \mathrm{i}\sin(b)| = \exp(a)$. Damit $\exp(z) = 1$ wird, muß also notwendigerweise $1 = |\exp(z)| = \exp(a)$ sein, mithin $a = 0$.
Falls $a = 0$, dann ist $\exp(z) = \cos(b) + \mathrm{i}\sin(b)$. Damit $\cos(b) = 1$ und $\sin(b) = 0$ wird, muß nun noch $b \in 2\pi\mathbb{Z} \cap \pi\mathbb{Z} = 2\pi\mathbb{Z}$ liegen.
Somit ist genau dann $\exp(z) = \exp(a + b\mathrm{i}) = 1$, wenn $a = 0$ und $b \in 2\pi\mathbb{Z}$ ist, also wenn $z = a + b\mathrm{i} \in 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$ ist.
Ergebnis: $\mathrm{Kern}(\exp) = 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$.

Aufgabe 28 Sei

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/(9)) & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/(3)) \\ \begin{pmatrix} a+(9) & b+(9) \\ c+(9) & d+(9) \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} a+(3) & b+(3) \\ c+(3) & d+(3) \end{pmatrix} \end{array},$$

wobei $a,\, b,\, c,\, d \in \mathbb{Z}$.
Man zeige: φ ist ein surjektiver Gruppenmorphismus.
Man bestimme $|\,\mathrm{Kern}(\varphi)|$. Man bestimme $|\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/(3))| = |\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)|$. Man bestimme $|\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/(9))|$.

Lösung.
Wir zeigen: φ ist ein surjektiver Gruppenmorphismus.

Es bildet φ tatsächlich von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/(9))$ nach $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/(3))$ ab, denn für $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ folgt aus $\begin{pmatrix} a+(9) & b+(9) \\ c+(9) & d+(9) \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/(9))$, daß $\det \begin{pmatrix} a+(9) & b+(9) \\ c+(9) & d+(9) \end{pmatrix} = ad - bc + (9) \in \mathrm{U}(\mathbb{Z}/(9))$ ist, also $ad - bc$ teilerfremd zu 9, also $ad - bc$ teilerfremd zu 3, also $\det \begin{pmatrix} a+(3) & b+(3) \\ c+(3) & d+(3) \end{pmatrix} = ad - bc + (3) \in \mathrm{U}(\mathbb{Z}/(3))$, also $\begin{pmatrix} a+(3) & b+(3) \\ c+(3) & d+(3) \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/(3))$.

Es ist φ nach Konstruktion surjektiv.

Seien $a, b, c, d, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d} \in \mathbb{Z}$ gegeben mit $\begin{pmatrix} a+(9) & b+(9) \\ c+(9) & d+(9) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{a}+(9) & \tilde{b}+(9) \\ \tilde{c}+(9) & \tilde{d}+(9) \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/(9))$. Es wird

$$\begin{array}{rcl} \varphi(\begin{pmatrix} a+(9) & b+(9) \\ c+(9) & d+(9) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{a}+(9) & \tilde{b}+(9) \\ \tilde{c}+(9) & \tilde{d}+(9) \end{pmatrix}) & = & \varphi(\begin{pmatrix} a\tilde{a}+b\tilde{c}+(9) & a\tilde{b}+b\tilde{d}+(9) \\ c\tilde{a}+d\tilde{c}+(9) & c\tilde{b}+d\tilde{d}+(9) \end{pmatrix}) \\ & = & \begin{pmatrix} a\tilde{a}+b\tilde{c}+(3) & a\tilde{b}+b\tilde{d}+(3) \\ c\tilde{a}+d\tilde{c}+(3) & c\tilde{b}+d\tilde{d}+(3) \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} a+(3) & b+(3) \\ c+(3) & d+(3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{a}+(3) & \tilde{b}+(3) \\ \tilde{c}+(3) & \tilde{d}+(3) \end{pmatrix} \\ & = & \varphi(\begin{pmatrix} a+(9) & b+(9) \\ c+(9) & d+(9) \end{pmatrix}) \cdot \varphi(\begin{pmatrix} \tilde{a}+(9) & \tilde{b}+(9) \\ \tilde{c}+(9) & \tilde{d}+(9) \end{pmatrix}) \,. \end{array}$$

Wir bestimmen $|\,\mathrm{Kern}(\varphi)|$. Seien $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ gegeben mit $\begin{pmatrix} a+(9) & b+(9) \\ c+(9) & d+(9) \end{pmatrix}, \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/(9))$, d.h. mit $ad - bc$ teilerfremd zu 3. Genau dann ist $\varphi(\begin{pmatrix} a+(9) & b+(9) \\ c+(9) & d+(9) \end{pmatrix}) = 1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)}$, wenn

$$\begin{pmatrix} a+(3) & b+(3) \\ c+(3) & d+(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(3) & 0+(3) \\ 0+(3) & 1+(3) \end{pmatrix}) \,,$$

d.h. wenn $a = 1 + 3u$, $b = 3v$, $c = 3w$, $d = 1 + 3x$ für gewisse $u, v, w, x \in \mathbb{Z}$.

Ist umgekehrt $a = 1 + 3u$, $b = 3v$, $c = 3w$, $d = 1 + 3x$ für gewisse $u, v, w, x \in \mathbb{Z}$, dann ist $ad - bc = (1 + 3u) \cdot (1 + 3x) - 3v \cdot 3w \equiv_3 1$ und also teilerfremd zu 3.

Es folgt

$$\mathrm{Kern}(\varphi) \;=\; \{ \begin{pmatrix} 1+3u+(9) & 3v+(9) \\ 3w+(9) & 1+3x+(9) \end{pmatrix} : u, v, w, x \in \mathbb{Z} \} \;=\; \{ \begin{pmatrix} 1+3u+(9) & 3v+(9) \\ 3w+(9) & 1+3x+(9) \end{pmatrix} : u, v, w, x \in [0, 2] \} \,,$$

wobei die Parametrisierung in letzterer Menge keine Redundanzen mehr aufweist. Somit ist auch

$$|\,\mathrm{Kern}(\varphi)| \;=\; 3^4 \;=\; 81$$

bekannt.

Es ist $|\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/(3))| = |\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)| = (3^2 - 1)(3^2 - 3) = 2^4 \cdot 3 = 48$.

Schließlich wird mit dem Homomorphiesatz

$$|\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/(9))| \;=\; |\,\mathrm{Kern}(\varphi)| \cdot |\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/(9)) / \,\mathrm{Kern}(\varphi)| \;=\; |\,\mathrm{Kern}(\varphi)| \cdot |\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/(3))| \;=\; 3^4 \cdot 2^4 \cdot 3 \;=\; 3^5 \cdot 2^4 \;=\; 3888 \,.$$

Wir bestimmen $|\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/(9))|$.