M. Truong, M. Künzer

Algebra für Lehramt, SoSe 22

Lösung 2

Aufgabe 5 Sei K ein Körper. Sei S ein Ring, in welchem $0_S \neq 1_S$ ist.
Sei $\varphi : K \to S$ ein Ringmorphismus. Man zeige folgende Aussagen.

(1) Es gibt in K nur die Ideale 0 und K.

   (a) Man zeige dies ohne Verwendung einer Aussage über maximale Ideale.

   (b) Man zeige dies unter Verwendung einer Aussage über maximale Ideale.

(2) Es ist $\operatorname{Kern}(\varphi) = 0$.

(3) Es ist φ injektiv.

Lösung.
Zu (1).
Zu (a). Es sind 0 und K Ideale von K.
Sei umgekehrt I ein Ideal von K. Sei $I \neq 0$. Wir haben $I \overset{!}{=} K$ zu zeigen.
Wir wählen $x \in I \smallsetminus \{0\}$. Sei $y \in K$ gegeben. Dann ist $y = (y \cdot x^{-1}) \cdot x \in I$.
Also ist $I = K$.
Zu (b). Es sind 0 und K Ideale von K.
Es ist $K/0 \xrightarrow{\sim} K : x + 0 \mapsto x$, mit dem inversen Isomorphismus $K \xrightarrow{\sim} K/0 : x \mapsto x + 0$.
Da K ein Körper ist, ist also auch $K/0$ ein Körper.
Folglich ist $0 \lhd K$ ein maximales Ideal. Also gibt es kein Ideal I in K mit $0 \subset I \lhd K$. Folglich sind 0 und K die einzigen Ideale in K.
Zu (2). Es ist $\operatorname{Kern}(\varphi) \trianglelefteq K$. Also ist $\operatorname{Kern}(\varphi) = 0$ oder $\operatorname{Kern}(\varphi) = K$, dank (1).
Nun ist $\varphi(1_K) = 1_S \neq 0_S$. Also ist $1_K \notin \operatorname{Kern}(\varphi)$. Folglich ist $\operatorname{Kern}(\varphi) \neq K$.
Also ist $\operatorname{Kern}(\varphi) = 0$.
Zu (3). Da $\operatorname{Kern}(\varphi) = 0$ ist dank (2), ist φ injektiv.

Aufgabe 6

(1) Man zeige: Es ist
$$\begin{array}{rcrcrcl} \varphi & : & \mathbb{Z}/21\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} & \times & \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \\ & & a + 21\mathbb{Z} & \mapsto & (a + 3\mathbb{Z} & , & a + 7\mathbb{Z}) \end{array}$$
ein Ringisomorphismus.
Man bestimme Urbilder von $(1 + 3\mathbb{Z}, 0 + 7\mathbb{Z})$ und von $(0 + 3\mathbb{Z}, 1 + 7\mathbb{Z})$.
Man bestimme eine Abbildungsvorschrift für die Umkehrabbildung φ^{-1}.

(2) Man bestimme einen Ringisomorphismus φ von $\mathbb{Z}/120\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.
Man bestimme eine Abbildungsvorschrift für φ^{-1}.

(3) Man bestimme einen Ringisomorphismus φ von $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - X)\mathbb{Q}[X]$ nach $\mathbb{Q}[X]/X\mathbb{Q}[X] \times \mathbb{Q}[X]/(X-1)\mathbb{Q}[X]$.

(4) Man bestimme einen Ringisomorphismus ψ von $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - X)\mathbb{Q}[X]$ nach $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.
Man bestimme eine Abbildungsvorschrift für ψ^{-1}.

Lösung.

Zu (1). Es ist $7\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, da $1 = 1 \cdot 7 + (-2) \cdot 3 \in 7\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z}$.

Es ist $7\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = 21\mathbb{Z}$, da eine ganze Zahl genau dann durch 7 und durch 3 teilbar ist, wenn sie durch 21 teilbar ist.

Also ergibt sich der behauptete Isomorphismus aus dem Chinesischen Restsatz.

Gesucht ist das Urbild $x + 21\mathbb{Z}$ von $(1 + 3\mathbb{Z}, 0 + 7\mathbb{Z})$, wobei $x \in \mathbb{Z}$. Es soll also $x \equiv_3 1$ und $x \equiv_7 0$ gelten. Dies ist für $x = 7$ erfüllt. Also ist $7 + 21\mathbb{Z}$ das gesuchte Urbild.

Gesucht ist das Urbild $y + 21\mathbb{Z}$ von $(0 + 3\mathbb{Z}, 1 + 7\mathbb{Z})$, wobei $y \in \mathbb{Z}$. Es soll also $x \equiv_3 0$ und $x \equiv_7 1$ gelten. Dies ist für $x = 15$ erfüllt. Also ist $15 + 21\mathbb{Z}$ das gesuchte Urbild.

Zu (2). Es ist $8\mathbb{Z}+3\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, da $1 = (-1)\cdot 8+3\cdot 3 \in 8\mathbb{Z}+3\mathbb{Z}$. Es ist $8\mathbb{Z}+5\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, da $1 = 2\cdot 8+(-3)\cdot 5 \in 8\mathbb{Z}+5\mathbb{Z}$. Es ist $3\mathbb{Z} + 5\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, da $1 = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 5 \in 3\mathbb{Z} + 5\mathbb{Z}$.

Es ist $8\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} \cap 5\mathbb{Z} = 120\mathbb{Z}$, da eine ganze Zahl genau dann durch 8, durch 3 und durch 5 teilbar ist, wenn sie durch 120 teilbar ist.

Also liefert der Chinesische Restsatz den Ringisomorphismus

$$\begin{array}{rcrcccccc} \varphi & : & \mathbb{Z}/120\mathbb{Z} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} & \times & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} & \times & \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \\ & & a + 120\mathbb{Z} & \mapsto & (a + 8\mathbb{Z} & , & a + 3\mathbb{Z} & , & a + 5\mathbb{Z})\ . \end{array}$$

Dieser bildet insbesondere wie folgt ab.

$$\begin{array}{rcl} -15 + 120\mathbb{Z} & \overset{\varphi}{\mapsto} & (1 + 8\mathbb{Z},\ 0 + 3\mathbb{Z},\ 0 + 5\mathbb{Z}) \\ 40 + 120\mathbb{Z} & \overset{\varphi}{\mapsto} & (0 + 8\mathbb{Z},\ 1 + 3\mathbb{Z},\ 0 + 5\mathbb{Z}) \\ -24 + 120\mathbb{Z} & \overset{\varphi}{\mapsto} & (1 + 8\mathbb{Z},\ 0 + 3\mathbb{Z},\ 1 + 5\mathbb{Z}) \end{array}$$

Für $x,\ y,\ z \in \mathbb{Z}$ wird also

$$-15x+40y-24z \overset{\varphi}{\mapsto} (x+8\mathbb{Z},\ 0+3\mathbb{Z},\ 0+5\mathbb{Z})+(0+8\mathbb{Z},\ y+3\mathbb{Z},\ 0+5\mathbb{Z})+(1+8\mathbb{Z},\ 0+3\mathbb{Z},\ z+5\mathbb{Z}) \ = \ (x+8\mathbb{Z},\ y+3\mathbb{Z},\ z+5\mathbb{Z})\ .$$

Mit anderen Worten, es ist

$$\varphi^{-1}\big((x + 8\mathbb{Z},\ y + 3\mathbb{Z},\ z + 5\mathbb{Z})\big) \ = \ -15x + 40y - 24z\ .$$

Zu (3). Es ist $X\mathbb{Q}[X] + (X - 1)\mathbb{Q}[X] = \mathbb{Q}[X]$, da $1 = 1 \cdot X + (-1) \cdot (X - 1) \in X\mathbb{Q}[X] + (X - 1)\mathbb{Q}[X]$.

Es ist $X\mathbb{Q}[X] \cap (X - 1)\mathbb{Q}[X] = (X^2 - X)\mathbb{Q}[X]$, da ein Polynom in $\mathbb{Q}[X]$ genau dann durch X und durch $X - 1$ teilbar ist, wenn es durch $X \cdot (X - 1) = X^2 - X$ teilbar ist.

Der Chinesische Restsatz gibt also den Ringisomorphismus

$$\begin{array}{rcrcccc} \varphi & : & \mathbb{Q}[X]/(X^2 - X)\mathbb{Q}[X] & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Q}[X]/X\mathbb{Q}[X] & \times & \mathbb{Q}[X]/(X - 1)\mathbb{Q}[X] \\ & & f(X) + (X^2 - X)\mathbb{Q}[X] & \mapsto & (f(X) + X\mathbb{Q}[X] & , & f(X) + (X - 1)\mathbb{Q}[X])\ . \end{array}$$

Zu (4).

Wir haben den surjektiven Ringmorphismus

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Q}[X] & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{Q} \\ f(X) & \mapsto & f(0)\ . \end{array}$$

Dieser hat Kern $X\mathbb{Q}[X]$, da ein Polynom $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ genau dann durch X teilbar ist, wenn $f(0) = 0$ gilt.

Der Homomorphiesatz liefert also den Ringisomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Q}[X]/X\mathbb{Q}[X] & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & \mathbb{Q} \\ f(X) + X\mathbb{Q}[X] & \mapsto & f(0)\ . \end{array}$$

Wir haben den surjektiven Ringmorphismus

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Q}[X] & \xrightarrow{\beta} & \mathbb{Q} \\ g(X) & \mapsto & g(1)\ . \end{array}$$

Dieser hat Kern $(X - 1)\mathbb{Q}[X]$, da ein Polynom $g(X) \in \mathbb{Q}[X]$ genau dann durch $X - 1$ teilbar ist, wenn $g(1) = 0$ gilt.

Der Homomorphiesatz liefert also den Ringisomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Q}[X]/X\mathbb{Q}[X] & \xrightarrow{\bar\beta} & \mathbb{Q} \\ g(X) + (X-1)\mathbb{Q}[X] & \mapsto & g(1)\;. \end{array}$$

Zusammen erhalten wir den Ringisomorphismus $\varphi' := \bar\alpha \times \bar\beta$ mit

$$\begin{array}{rcccl} \mathbb{Q}[X]/X\mathbb{Q}[X] & \times & \mathbb{Q}[X]/(X-1)\mathbb{Q}[X]) & \xrightarrow{\varphi'} & \mathbb{Q} \quad\times\quad \mathbb{Q} \\ (f(X)+(X-1)\mathbb{Q}[X] & , & g(X)+(X-1)\mathbb{Q}[X]) & \mapsto & (f(0) \quad , \quad g(1))\;. \end{array}$$

Komponieren wir mit dem Ringisomorphismus φ aus (3), so erhalten wir den Ringisomorphismus $\psi := \varphi' \circ \varphi$ mit

$$\begin{array}{rrcl} \psi \;: & \mathbb{Q}[X]/(X^2-X)\mathbb{Q}[X] & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Q} \quad\times\quad \mathbb{Q} \\ & f(X)+(X^2-X)\mathbb{Q}[X] & \mapsto & (f(0) \quad , \quad f(1))\;. \end{array}$$

Dieser bildet für $(p,q) \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ wie folgt ab.

$$\begin{array}{rcl} -X+1+(X^2-X)\mathbb{Q}[X] & \overset{\psi}{\mapsto} & (1,0) \\ X+(X^2-X)\mathbb{Q}[X] & \overset{\psi}{\mapsto} & (0,1) \\ p(-X+1)+qX+(X^2-X)\mathbb{Q}[X] & \overset{\psi}{\mapsto} & (p,q) \end{array}$$

Mit anderen Worten, es ist

$$\psi^{-1}\big((p,q)\big) \;=\; p(-X+1)+qX+(X^2-X)\mathbb{Q}[X]\;.$$

Aufgabe 7 Man finde jeweils ein $a \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, für welches die Gleichung gilt (unter (3): beide Gleichungen gelten).

(1) $12\mathbb{Z} \cap 30\mathbb{Z} = a\mathbb{Z}$

(2) $12\mathbb{Z} + 30\mathbb{Z} = a\mathbb{Z}$

(3) $6\mathbb{Z} \cap a\mathbb{Z} = 18\mathbb{Z}$ und $6\mathbb{Z} + a\mathbb{Z} = 3\mathbb{Z}$

(4) $108\mathbb{Z} + (54\mathbb{Z} \cap 12\mathbb{Z}) = a\mathbb{Z}$

Lösung.
Zu (1). Es ist

$$12\mathbb{Z} \cap 30\mathbb{Z} \;=\; (2^2\cdot 3)\mathbb{Z} \cap (2\cdot 3\cdot 5)\mathbb{Z} \;=\; (2^2\cdot 3\cdot 5)\mathbb{Z} = 60\mathbb{Z}\;,$$

da eine ganze Zahl genau dann durch $2^2\cdot 3$ und durch $2\cdot 3\cdot 5$ teilbar ist, wenn sie durch $2^2\cdot 3\cdot 5$ teilbar ist.
Also ist $a = 60$.
Zu (2). Wir behaupten $12\mathbb{Z}+30\mathbb{Z} \overset{!}{=} 6\mathbb{Z}$.
Zu $\subseteq$. Es ist $12u+30v$ durch 6 teilbar für $u,\, v \in \mathbb{Z}$.
Zu $\supseteq$. Es ist $6 = -2\cdot 12 + 5\cdot 6 \in 12\mathbb{Z}+30\mathbb{Z}$. Also ist auch $6\mathbb{Z} \subseteq 12\mathbb{Z}+30\mathbb{Z}$.
Somit ist $a = 6$.
Zu (3). Wir behaupten $6\mathbb{Z}\cap 9\mathbb{Z} \overset{!}{=} 18\mathbb{Z}$ und $6\mathbb{Z}+9\mathbb{Z} \overset{!}{=} 3\mathbb{Z}$.
Ersteres gilt, da eine ganze Zahl genau dann durch $6 = 2\cdot 3$ und durch $9 = 3^2$ teilbar ist, wenn sie durch $18 = 2\cdot 3^2$ teilbar ist.
Zweiteres:
Zu $\subseteq$. Es ist $6u+9v$ durch 3 teilbar für $u,\, v \in \mathbb{Z}$.
Zu $\supseteq$. Es ist $3 = -1\cdot 6 + 1\cdot 9 \in 6\mathbb{Z}+9\mathbb{Z}$. Also ist auch $3\mathbb{Z} \subseteq 6\mathbb{Z}+9\mathbb{Z}$.
Also ist $a = 9$.
Zu (4). Es ist $54\mathbb{Z}\cap 12\mathbb{Z} = 108\mathbb{Z}$, da eine ganze Zahl genau dann durch $54 = 2\cdot 3^3$ und durch $12 = 2^2\cdot 3$ teilbar ist, wenn sie duch $108 = 2^2\cdot 3^3$ teilbar ist.
Ferner ist $108\mathbb{Z}+108\mathbb{Z} = 108\mathbb{Z}$.

Somit ist $a = 108$.

Aufgabe 8 Wir betrachten den Ringmorphismus

$$\begin{array}{rcccccc} \varphi & : & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \times & \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \\ & & a & \mapsto & (a+4\mathbb{Z} & , & a+6\mathbb{Z}) \end{array}$$

(1) Man bestimme ein Element in $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \smallsetminus \varphi(\mathbb{Z})$.

(2) Man bestimme ein $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ mit $k\mathbb{Z} = \operatorname{Kern}(\varphi)$.

(3) Man gebe die Charakteristik $\operatorname{char}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$ an.

(4) Unter Verwendung des Homomorphiesatzes bestimme man $|\varphi(\mathbb{Z})|$, d.h. die Anzahl der Elemente im Bild von φ.

Lösung.

Zu (1). Wir behaupten $(1+4\mathbb{Z}, 0+6\mathbb{Z}) \overset{!}{\in} (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \smallsetminus \varphi(\mathbb{Z})$.

Dazu *nehmen wir an,* es gibt ein $a \in |Z$ mit $\varphi(a) = (a+4\mathbb{Z}, a+6\mathbb{Z}) = (1+4\mathbb{Z}, 0+6\mathbb{Z})$. Dann ist $a+4\mathbb{Z} = 1+4\mathbb{Z}$ und $a+6\mathbb{Z} = 0+6\mathbb{Z}$. Mit anderen Worten, es ist $a \equiv_4 1$ und $a \equiv_6 0$. Es folgt $a \equiv_2 1$ und $a \equiv_2 0$. Wir haben einen *Widerspruch.*

Zu (2). Es ist $a \in \mathbb{Z}$ genau dann im Kern von φ enthalten, wenn $0 = \varphi(a) = (a+4\mathbb{Z}, a+6\mathbb{Z})$ ist, d.h. wenn $a \equiv_4 0$ und $a \equiv_6 0$, d.h. wenn $a \in 4\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z}$ ist. Nun ist $4\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z} = 12\mathbb{Z}$, da eine ganze Zahl genau dann durch 4 und durch 6 teilbar ist, wenn sie durch 12 teilbar ist.

Zusammen ist also $\operatorname{Kern}(\varphi) = 12\mathbb{Z}$. Wir können also $k = 12$ wählen.

Zu (3). Nach Definition der Charakteristik wurde diese in (2) zu $\operatorname{char}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) = k = 12$ berechnet.

Zu (4). Nach Homomorphiesatz ist $\varphi(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/\operatorname{Kern}(\varphi) \overset{(2)}{=} \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. Also ist $|\varphi(\mathbb{Z})| = |\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}| = 12$.