N. Krauß, M. Künzer Abgabe bis Mo 28.06.2021

Algebra für Lehramt, SoSe 21

Blatt 9

Aufgabe 33

(1) Man bestimme bis auf Isomorphie alle abelschen Gruppen der Ordnung 270.

(2) Man bestimme $\mathrm{Syl}_3(\mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_{18})$, wobei $\mathrm{C}_2 = \langle a \rangle$ und $\mathrm{C}_{18} = \langle b \rangle$ geschrieben werde.

(3) Seien G und H isomorphe Gruppen. Man zeige: Für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ ist

$$|\{x \in G : |\langle x \rangle| = n\}| \;=\; |\{x \in H : |\langle x \rangle| = n\}| \;.$$

(4) Wie viele Elemente in $\mathbb{Z}/(9) \times \mathbb{Z}/(9)$ haben Ordnung 3?

Aufgabe 34 Sei G eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung 27.

(1) Man bestimme $|\mathrm{Z}(G)|$.

(2) Ist $G/\mathrm{Z}(G)$ abelsch? Gibt es in $G/\mathrm{Z}(G)$ eine Untergruppe der Ordnung 3?

(3) Gibt es in G einen Normalteiler von Ordnung 9? Ist jede Untergruppe der Ordnung 9 von G auch ein Normalteiler?

(4) Man finde eine Untergruppe $G \leqslant \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_3)$ von Ordnung 27. Man bestimme ihr Zentrum $\mathrm{Z}(G)$ und einen Normalteiler $N \trianglelefteq G$ von Ordnung 9.

Aufgabe 35 Sei G eine einfache Gruppe der Ordnung 168.

(1) Hat G eine Untergruppe von Index 2?

(2) Hat G eine Untergruppe von Index 3? *Hinweis:* Operationsmorphismus $G \to \mathrm{S}_{G/U}$.

(3) Gibt es ein Element $x \in G$ mit $|\,{}^G x| = 4$?

(4) Man bestimme $|\,\mathrm{Syl}_7(G)|$. Wie viele Elemente der Ordnung 7 gibt es in G?

Aufgabe 36 Man entscheide, ob es eine einfache Gruppe G mit $|G| = n$ gibt.

(1) $n = 10$

(2) $n = 40$

(3) $n = 48$

(4) $n = 60$