N. Krauß, M. Künzer — Abgabe bis Mo 21.06.2021

Algebra für Lehramt, SoSe 21

Blatt 8

Aufgabe 29

(1) Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung 160. Es gebe ein $P \in \mathrm{Syl}_5(G)$ mit $P \ntrianglelefteq G$. Man bestimme $|\,\mathrm{Syl}_5(G)|$.

(2) Sei H eine Gruppe von Ordnung 35. Man zeige, dass $H \simeq \mathrm{C}_5 \times \mathrm{C}_7$ ist.

(3) Seien $p,\, q \in \mathbb{Z}$ prim mit $3 \leqslant p < q$. Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung $p^2 \cdot q$. Man zeige, dass es eine normale q-Sylowgruppe in G gibt.

Aufgabe 30 Man zeige oder widerlege.

Sei G eine endliche Gruppe mit $|G| > 1$. Sei $p \in \mathbb{Z}$ prim mit $|G| \equiv_p 0$. Sei $M := \bigcap_{P \in \mathrm{Syl}_p(G)} P$.

(1) Es ist $M \trianglelefteq G$.

(2) Sei $N \trianglelefteq G$ mit $|N| = p^b$ für ein $b \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Dann ist $N \leqslant M$.

(3) Seien $U \leqslant G$ und $N \trianglelefteq G$ gegeben mit $U \cap N = 1$ und mit $|G| = |U| \cdot |N|$. Dann ist $G \simeq U \times N$.

(4) Es gibt einen Primfaktor q von $|G|$ so, dass G eine normale q-Sylowgruppe besitzt.

Aufgabe 31

(1) Sei p prim. Sei $G := \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_p)$. Man bestimme eine p-Sylowgruppe P von G, ihren Normalisator $\mathrm{N}_G(P)$ und $|\,\mathrm{Syl}_p(G)|$.

(2) Man bestimme $\mathrm{Syl}_7(\mathrm{D}_{14})$ und $\mathrm{Syl}_2(\mathrm{D}_{14})$.

Aufgabe 32

(1) Sei $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$. Man finde $S, T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ derart, dass $SAT = D$ ist, mit $D = \sum_{j\in[1,2]} x_j\, \mathrm{e}_{j,j}$, wobei $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^{\times}$ und $(x_1) \supseteq (x_2)$.

(2) Sei $A := \begin{pmatrix} 8 & 21 & -3 & 22 \\ -6 & 3 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -24 & 0 & -24 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{4\times 4}$. Man finde $S, T \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$ derart, dass $SAT = D$ ist, mit $D = \sum_{j\in[1,4]} x_j\, \mathrm{e}_{j,j}$, wobei $x_j \in \mathbb{Z}^{\times}$ für $j \in [1,4]$ und $(x_1) \supseteq (x_2) \supseteq (x_3) \supseteq (x_4)$.

(3) Sei $A := \begin{pmatrix} \mathrm{i}+1 & 2 \\ 3\mathrm{i}-3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]^{2\times 2}$. Man finde $S, T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[\mathrm{i}])$ derart, dass $SAT = D$ ist, mit $D = \sum_{j\in[1,2]} x_j\, \mathrm{e}_{j,j}$, wobei $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]^{\times}$ und $(x_1) \supseteq (x_2)$.