N. Krauß, M. Künzer Abgabe bis Mo 17.05.2021

Algebra für Lehramt, SoSe 21

# Blatt 4

**Aufgabe 13**

(1) Man finde in $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ zwei nicht assoziierte Primelemente von Grad 13; vgl. Beispiel 47.(3).

(2) In $\mathbb{F}_5[X]$ bestimme man je ein normiertes irreduzibles Polynom von Grad 1, von Grad 2 und von Grad 3.

**Aufgabe 14** Sei $R$ ein faktorieller Ring und $K = \mathrm{Quot}(R)$. Sei $p \in R$ prim.
Man zeige folgendes.

(1) Seien $x,\ y \in R^\times$. Sei $g \in R^\times$ ein größter gemeinsamer Teiler von $x$ und $y$. Dann ist 1 ein größter gemeinsamer Teiler von $\frac{x}{g}$ und $\frac{y}{g}$.

(2) Für $x, y \in K$ ist $\mathrm{v}_p(x \cdot y) = \mathrm{v}_p(x) + \mathrm{v}_p(y)$.

(3) Für $x, y \in K$ ist $\mathrm{v}_p(x + y) \geqslant \min\{\mathrm{v}_p(x), \mathrm{v}_p(y)\}$.
Ist $\mathrm{v}_p(x) \neq \mathrm{v}_p(y)$, dann gilt $\mathrm{v}_p(x + y) = \min\{\mathrm{v}_p(x), \mathrm{v}_p(y)\}$.

**Aufgabe 15**

(1) In $\mathbb{Z}$ bestimme man $\mathrm{ggT}(65, 169)$ zunächst via Primfaktorzerlegung und anschließend mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus.

(2) In $\mathbb{Q}[X]$ bestimme man $\mathrm{ggT}(X^6 - 1,\ X^4 - 2X^2 + 1)$.

(3) In $\mathbb{F}_2[X]$ bestimme man $\mathrm{ggT}(X^3 + X + 1,\ X^5 + X^2)$.

(4) In $\mathbb{Q}[X, Y]$ bestimme man $\mathrm{ggT}(X^2Y + X^2,\ XY^2 + XY)$.

**Aufgabe 16**

(1) Man bestimme in $\mathrm{S}_4$
$$(1, 2, 3) \circ (1, 4)(2, 3).$$

(2) Man bestimme in $\mathrm{S}_4$
$$(1, 2, 3) \circ (1, 4, 2, 3).$$

(3) Sei $f := (1, 4, 2, 3)$. Man bestimme ein $g \in \mathrm{S}_4$ so, dass $f \circ g = \mathrm{id}$ ist.

(4) Sei $h := (1, 2)(3, 4) \in \mathrm{S}_4$. Man bestimme ein $i \in \mathrm{S}_4$ so, dass $i \circ h$ aus einem Zykel der Länge 4 besteht.