N. Krauß, M. Künzer Abgabe bis Mo 26.07.2021

Algebra für Lehramt, SoSe 21

Blatt 13

Aufgabe 49 Seien $M|L|K$ Körpererweiterungen. Man zeige folgendes.

(1) Seien M und L algebraische Abschlüsse von K. Dann ist $M = L$.

(2) Sei M ein algebraischer Abschluss von K.
Dann ist M auch ein algebraischer Abschluss von L.

Aufgabe 50 Man zeige oder widerlege.

(1) $\mathbb{F}_5$ ist algebraisch abgeschlossen.

(2) Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ und d ein Teiler von n. Sei $K \subseteq \mathbb{F}_{p^n}$ ein Teilkörper mit $|K| = p^d$.
Dann ist $K = \{x \in \mathbb{F}_{p^n} : x^{p^d} = x\}$.

(3) Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$. Es hat $\mathbb{F}_{p^n}$ einen Teilkörper mit d Elementen für jeden Teiler $d \neq 1$ von p^n.

(4) Es hat $\mathbb{F}_{64}$ genau 4 Teilkörper.

Aufgabe 51 Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$. Seien K und L Körper mit $|K| = |L| = p^n$ Elementen.

(1) Sei $a \in K$ mit $K = \mathbb{F}_p(a)$. Man zeige: Es gibt ein $b \in L$ mit

$$\mu_{b,\mathbb{F}_p}(X) = \mu_{a,\mathbb{F}_p}(X) \ .$$

(2) Sei $f(X) \in \mathbb{F}_p[X]$ normiert und irreduzibel von Grad n. Dann gibt es ein $b \in L$ mit

$$\mu_{b,\mathbb{F}_p}(X) = f(X) \ .$$

(3) Es ist

$$X^{p^n} - X = \prod_{\substack{f(X) \in \mathbb{F}_p[X] \\ \text{normiert und irreduzibel} \\ \deg(f(X))|n}} f(X) \ .$$

Aufgabe 52

(1) Man konstruiere einen Körperisomorphismus $\mathbb{F}_5(\gamma) \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_5(\tilde{\gamma})$, wobei $\gamma^2 = 2$ und $\tilde{\gamma}^2 = 3$ ist.

(2) Man konstruiere, unter Verwendung von zwei verschiedenen irreduziblen Polynomen, zwei Körper K und L mit $|K| = |L| = 9$. Man gebe einen Körperisomorphismus $K \xrightarrow{\sim} L$ an.

(3) Man bestimme für jedes irreduzible Polynom $f(X) \in \mathbb{F}_2[X]$ mit $\deg(f(X)) = 4$ ein Element $b \in \mathbb{F}_{16}$ mit $\mu_{b,\mathbb{F}_2}(X) = f(X)$.

(4) Man verifiziere durch direkte Rechnung, dass

$$X^{16} - X = \prod_{\substack{f(X) \in \mathbb{F}_2[X] \\ \text{normiert und irreduzibel} \\ \deg(f(X))|4}} f(X)$$

ist.