N. Krauß, M. Künzer Abgabe bis Mo 12.07.2021

Algebra für Lehramt, SoSe 21

Blatt 11

Aufgabe 41

(1) Man bestimme alle $x \in \mathbb{F}_5$ mit $\mathrm{U}(\mathbb{F}_5) = \langle x \rangle$.

(2) Sei $\mathbb{F}_8 := \mathbb{F}_2[X]/(X^3 + X + 1)$. Sei $\beta := X + (X^3 + X + 1)$. Dann ist $\mathbb{F}_8 = \mathbb{F}_2(\beta)$ und $\beta^3 = \beta + 1$. Man bestimme alle $x \in \mathbb{F}_8$ mit $\mathrm{U}(\mathbb{F}_8) = \langle x \rangle$.

(3) Sei $\mathbb{F}_{16} := \mathbb{F}_2[X]/(X^4 + X + 1)$. Sei $\delta := X + (X^4 + X + 1)$. Dann ist $\mathbb{F}_{16} = \mathbb{F}_2(\delta)$ und $\delta^4 = \delta + 1$. Man bestimme ein $x \in \mathbb{F}_{16}$ mit $\mathrm{U}(\mathbb{F}_{16}) = \langle x \rangle$ so, dass x keine Nullstelle von $X^4 + X + 1$ ist.

(4) Sei $\mathbb{F}_{25} := \mathbb{F}_5[X]/(X^2 - 2)$. Sei $\gamma := X + (X^2 - 2)$. Dann ist $\mathbb{F}_{25} = \mathbb{F}_5(\gamma)$ und $\gamma^2 = 2$. Man bestimme ein $x \in \mathbb{F}_{25}$ mit $\mathrm{U}(\mathbb{F}_{25}) = \langle x \rangle$.

Aufgabe 42 Man zeige, dass folgende Polynome irreduzibel sind.

(1) $X^7 + 26X^5 + 65X^4 - 91X + 156 \in \mathbb{Q}[X]$

(2) $(X + 1)^5 + 2 \in \mathbb{Q}[X]$

Ist es möglich, das Kriterium von Eisenstein ohne vorherige Translation anzuwenden?

(3) $X^5 - 5X^3 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$

(4) $X^2 + \sqrt[3]{5}X + 5\sqrt[3]{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})[X]$

Aufgabe 43

(1) Man zeige $\cos(3x) = 4\cos(x)^3 - 3\cos(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

(2) Kann man mit Zirkel und Lineal einen Winkel von $20° = \frac{\pi}{9}$ konstruieren? Falls ja, führen Sie die Konstruktion durch. Falls nein, begründen Sie dies.

(3) Man zeige $\cos(5x) = 16\cos(x)^5 - 20\cos(x)^3 + 5\cos(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

(4) Kann man mit Zirkel und Lineal einen Winkel von $18° = \frac{\pi}{10}$ konstruieren? Falls ja, führen Sie die Konstruktion durch. Falls nein, begründen Sie dies.

Aufgabe 44 Man zeige oder widerlege.

(1) Es hat $\mathbb{F}_{16}$ einen Teilkörper mit 8 Elementen.

(2) Sei $L|K$ eine Körpererweiterung von Grad 4 und sei $f(X) \in K[X]$ ein Polynom von Grad 3, welches eine Nullstelle in L hat. Es hat $f(X)$ eine Nullstelle in K.

(3) Sei K ein Körper und $M := \{x \in K : \text{es gibt ein } n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1} \text{ mit } x^n = 1.\}$. Es ist $M \leqslant \mathrm{U}(K)$.

(4) Sei K ein Körper und $M := \{x \in K : \text{es gibt ein } n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1} \text{ mit } x^n = 1.\}$. Es ist $|M| < \infty$.