N. Krauß, M. Künzer Abgabe bis Mo 26.04.2021

Algebra für Lehramt, SoSe 21

Blatt 1

Aufgabe 1 Man zeige oder widerlege.

Sei R ein Ring. Wir schreiben $1 := 1_R$.

(1) Für $x \in R$ ist $0 \cdot x = 0$.

(2) Für $x \in R$ ist $(-1) \cdot x = -x$.

(3) Es enthält $\{ x \in R \,:\, x^2 = 1 \}$ mindestens zwei Elemente.

(4) Es enthält $\{ x \in R \,:\, x^2 = 1 \}$ höchstens zwei Elemente.

Aufgabe 2 Sei R ein kommutativer Ring.

(1) Man zeige die Eigenschaft (Ring 7) für den Polynomring $R[X]$.

(2) Für $f(X),\ g(X) \in R[X]$ zeige man $\deg(f(X) + g(X)) \leqslant \max\{\deg(f(X)), \deg(g(X))\}$.

(3) Sei R ein Integritätsbereich.
Für $f(X),\ g(X) \in R[X]$ zeige man $\deg(f(X) \cdot g(X)) = \deg(f(X)) + \deg(g(X))$.
An welcher Stelle braucht man, daß R ein Integritätsbereich ist?

Aufgabe 3 Sei $R := \mathbb{Q}^{2\times 2} = \left(\begin{smallmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \end{smallmatrix}\right)$.
Sei $S := \left(\begin{smallmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{smallmatrix}\right) := \{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \,:\, a,\, b,\, d \in \mathbb{Q} \} \subseteq \left(\begin{smallmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \end{smallmatrix}\right) = R$.

(1) Man zeige: Es ist S ein Teilring von R.

(2) Ist S kommutativ?

(3) Ist $\mathrm{U}(S) = \mathrm{U}(R) \cap S$?

(4) Gibt es einen Ring $\tilde{R}$ und einen Teilring $\tilde{S} \subseteq \tilde{R}$ mit $\mathrm{U}(\tilde{S}) \neq \mathrm{U}(\tilde{R}) \cap \tilde{S}$?

Aufgabe 4

(1) Man finde ein Element in $\mathrm{U}(\mathbb{Z}_{(3)}) \smallsetminus \mathrm{U}(\mathbb{Z})$.

(2) Man finde ein Element in $\mathrm{U}(\mathbb{Q}) \smallsetminus \mathrm{U}(\mathbb{Z}_{(3)})$.

(3) Für $x \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ sei $S_x := \{ y \in \mathbb{Q}^{2\times 2} \,:\, xy = yx \} \subseteq \mathbb{Q}^{2\times 2}$.
Man zeige: Es ist S_x ein Teilring von $\mathbb{Q}^{2\times 2}$.
Gibt es ein $x \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ mit $S_x \subset \mathbb{Q}^{2\times 2}$?