Bsp Sei p prim.

Für $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ sei

$$\mathrm{Irr}_{n,p} := \{ f(X) \in \mathbb{F}_p[X] :$$
$f(X)$ ist normiert,
irreduzibel und
von Grad n $\}$

Wir wollen $|\mathrm{Irr}_{6,p}|$ bestimmen.

Wir verwenden dazu Aufgabe 51.(3):

$$X^{p^n} - X = \prod_{\substack{f(X) \in \mathrm{Irr}_{d,p} \\ \text{für } d \mid n}} f(X)$$

Also

$$p^n = \deg\left(X^{p^n} - X\right) = \ldots$$

$$\ldots = \deg\Big(\prod_{\substack{f(X) \in \mathrm{Irr}_{d,p} \\ \text{für } d \mid n}} f(X) \Big)$$

$$= \sum_{\substack{f(x) \in \mathrm{Irr}_{d,p} \\ \text{für } d \mid n}} \underbrace{\deg(f(X))}_{= d}$$

$$= \sum_{d \mid n} \sum_{f(X) \in \mathrm{Irr}_{d,p}} d$$

$$= \sum_{d \mid n} |\mathrm{Irr}_{d,p}| \cdot d$$

Speziell:

$$p^1 = |\mathrm{Irr}_{1,p}| \cdot 1$$

$$p^2 = |\mathrm{Irr}_{1,p}| \cdot 1 + |\mathrm{Irr}_{2,p}| \cdot 2$$

$$p^3 = |\mathrm{Irr}_{1,p}| \cdot 1 + |\mathrm{Irr}_{3,p}| \cdot 3$$

$$p^6 = |\mathrm{Irr}_{1,p}| \cdot 1 + |\mathrm{Irr}_{2,p}| \cdot 2 + |\mathrm{Irr}_{3,p}| \cdot 3 + |\mathrm{Irr}_{6,p}| \cdot 6$$

$$\Rightarrow |\mathrm{Irr}_{6,p}| \cdot 6 = p^6 - p^3 - p^2 + p^1$$

$$\Rightarrow |\mathrm{Irr}_{6,p}| = \frac{1}{6}\left(p^6 - p^3 - p^2 + p^1\right)$$