<u>Bsp</u> In $\mathbb{Z}$ liegt jedes Ideal $I \triangleleft \mathbb{Z}$ in einem maximalen Ideal.

Das können wir auch <u>ohne</u> Zorns Lemma einsehen:

$\mathbb{Z}$ ist Hauptidealbereich

$\Rightarrow I = (x)$ für ein $x \in \mathbb{Z}$.

OE. $x \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$.

Sei $p \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ ein Primfaktor von x. Dann:

$$(x) \subseteq (p) \overset{\max}{\triangleleft} \mathbb{Z},$$

Letzteres, da $\mathbb{Z}/_{(p)} = \mathbb{F}_p$ ein Körper ist.

Bsp

- Wir zeigen, daß (Ring 2) in L gilt, d.h. daß die Addition assoziativ ist.

Seien $x, y, z \in L$. Wir finden ein gemeinsames $i \geq 0$ mit $x, y, z \in K_i$.

Es ist

$$
\begin{aligned}
(x \underset{L}{+} y) \underset{L}{+} z &= (\underbrace{x \underset{K_i}{+} y}_{\in K_i}) \underset{L}{+} \underbrace{z}_{\in K_i} \\
&= (x \underset{K_i}{+} y) \underset{K_i}{+} z \\
&= x \underset{K_i}{+} (y \underset{K_i}{+} z) \\
&= x \underset{L}{+} (y \underset{K_i}{+} z) \\
&= x \underset{L}{+} (y \underset{L}{+} z)
\end{aligned}
$$

- Wir zeigen, daß (Ring 7) in L gilt, d.h. daß das Distributivgesetz gilt.

Wir beschränken uns auf:

$$(x \underset{L}{+} y) \underset{L}{\cdot} z \overset{!}{=} x \underset{L}{\cdot} z \underset{L}{+} y \underset{L}{\cdot} z .$$

Wir finden ein gemeinsames $i \geq 0$ mit $x, y, z \in K_i$. Dann:

$$\begin{aligned}(x \underset{L}{+} y) \underset{L}{\cdot} z &= \underbrace{(x \underset{K_i}{+} y)}_{\in K_i} \underset{L}{\cdot} \underbrace{z}_{\in K_i} \\ &= (x \underset{K_i}{+} y) \underset{K_i}{\cdot} z \\ &= x \underset{K_i}{\cdot} z \underset{K_i}{+} y \underset{K_i}{\cdot} z \\ &= x \underset{K_i}{\cdot} z \underset{L}{+} y \underset{K_i}{\cdot} z \\ &= x \underset{L}{\cdot} z \underset{L}{+} y \underset{L}{\cdot} z\end{aligned}$$

Usf.