Bsp

(1) Wir betrachten $\mathbb{Q}(i) \mid \mathbb{Q}$.

Es ist $i^2 + 1 = 0$.

Also ist mit $f(X) = X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$

auch $f(i) = 0$.

Also ist i algebraisch über $\mathbb{Q}$.

(2) Wir betrachten

$\mathbb{Q}(T) \mid \mathbb{Q}$, wobei

$\mathbb{Q}(T) = \mathrm{Quot}(\mathbb{Q}[T])$.

Es ist T nicht algebraisch über $\mathbb{Q}$. Denn für jedes normierte Polynom $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$

ist $f(T) \neq 0$. In der

Tat ist $\deg(f(T)) = \deg(f(X))$.

<u>Bsp</u> Es ist

$$\mu_{\sqrt{2},\mathbb{Q}}(X) \overset{!}{=} X^2 - 2.$$

Zum einen ist $\sqrt{2}^2 - 2 = 0$

Zum anderen sei $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$

gegeben mit $f(\sqrt{2}) = 0$.

Dann teilen wir mit Rest:

$$f(X) = (X^2-2) \cdot q(X) + r(X)$$

mit $q(X) \in \mathbb{Q}[X]$ und

$r(X) \in \mathbb{Q}[X]$ mit

$$\deg(r(X)) < \deg(X^2-2) = 2$$

Es ist

$$0 = f(\sqrt{2}) = \overbrace{(\sqrt{2}^2 - 2)}^{0} \cdot q(\sqrt{2})$$
$$+ r(\sqrt{2})$$

Also ist $r(\sqrt{2}) = 0$.

Sei $r(X) = a_1 X + a_0$

mit $a_1, a_0 \in \mathbb{Q}$.

Es ist $a_1 \cdot \sqrt{2} + a_0 = 0$.

Wäre $a_1 \neq 0$, dann

wäre $\sqrt{2} = -\frac{a_0}{a_1} \in \mathbb{Q}$, $\lightning$

Also $a_1 = 0$. Also, wegen

$r(\sqrt{2}) = 0$, auch $a_0 = 0$.

Also $r(X) = 0$ und somit

$$f(X) = (X^2-2) \cdot q(X).$$

Folglich teilt X^2-2 jedes Polynom in $\mathbb{Q}[X]$, das Nullstelle $\sqrt{2}$ hat. Also ist $\mu_{\sqrt{2},\mathbb{Q}}(X) = X^2-2$.

<u>Bsp</u> Nun nochmal ein einfacheres Argument dafür, daß $\mu_{\sqrt{2},\mathbb{Q}}(X) = X^2-2$ ist:

Es ist X^2-2 ein normiertes Polynom in $\mathbb{Q}[X]$ mit

Nullstelle $\sqrt{2}$.

Ein Polynom ungleich 0 vom Grad 1 oder Grad 0 mit Nullstelle $\sqrt{2}$ gibt es nicht, da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Also: $\mu_{\sqrt{2},\mathbb{Q}}(X) = X^2 - 2$.