Bsp Wir wollen bis auf Isomorphie alle abelschen Gruppen der Ordnung 36 aufstellen.

Möglichkeiten, 36 so in Teiler ≥ 2 zu zerlegen, daß ein Faktor den nächsten teilt:

(1) $36 = 36 \Rightarrow \mathbb{Z}/(36)$

(2) $36 = 2 \cdot 18 \Rightarrow \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(18)$

(3) $36 = 3 \cdot 12 \Rightarrow \mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(12)$

(4) $36 = 6 \cdot 6 \Rightarrow \mathbb{Z}/(6) \times \mathbb{Z}/(6)$

Wir wollen die erhaltenen Gruppen noch gemäß Bem 164 zerlegen:

ist $y = y_1 \cdot \ldots \cdot y_k$ mit $y_1, \ldots, y_k$ paarweise teilerfremd, dann ist ...

$$\mathbb{Z}/(y) \simeq \underbrace{\mathbb{Z}/(y_1) \times \dots \times \mathbb{Z}/(y_k)}.$$

Also:

(1) $\mathbb{Z}/(36) \simeq \underbrace{\mathbb{Z}/(4) \times \mathbb{Z}/(9)}$

(2) $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(18) \simeq \mathbb{Z}/(2) \times \underbrace{\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(9)}$

(3) $\mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(12) \simeq \mathbb{Z}/(3) \times \underbrace{\mathbb{Z}/(4) \times \mathbb{Z}/(3)}$

$\simeq \mathbb{Z}/(4) \times \mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(3)$

(4) $\mathbb{Z}/(6) \times \mathbb{Z}/(6) \simeq \underbrace{\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(3)} \times \underbrace{\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(3)}$

$\simeq \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(3)$

Multiplikativ geschrieben:

(1) $\mathbb{Z}/(4) \times \mathbb{Z}/(9) \simeq C_4 \times C_9 \overset{\text{s.o.}}{\simeq} C_{36}$

(2) $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(9)$

$$\simeq C_2 \times C_2 \times C_9$$

$$\overset{\text{s.o.}}{\simeq} C_2 \times C_{18}$$

(3) $\mathbb{Z}/(4) \times \mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(3)$

$$\simeq C_4 \times C_3 \times C_3$$

$$\overset{\text{s.o.}}{\simeq} C_3 \times C_{12}$$

(4) $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(3)$

$$\simeq C_2 \times C_2 \times C_3 \times C_3$$

$$\overset{\text{s.o.}}{\simeq} C_6 \times C_6$$

Wir wollen zeigen, daß diese 4 Gruppen paarweise nichtisomorph sind:

(1) vs. (2, 3, 4):

$\mathbb{Z}/(36)$ enthält ein Element von Ordnung 36,

$\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(18)$, $\mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(12)$, $\mathbb{Z}/(6) \times \mathbb{Z}/(6)$ aber nicht.

Tatsächlich ist:

$18 \cdot x = 0$ für $x \in \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(18)$

$12 \cdot x = 0$ für $x \in \mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(12)$

$6 \cdot x = 0$ für $x \in \mathbb{Z}/(6) \times \mathbb{Z}/(6)$

Also: $\mathbb{Z}/(36) \not\cong \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(18)$,

$\mathbb{Z}/(36) \not\cong \mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(12)$, $\mathbb{Z}/(36) \not\cong \mathbb{Z}/(6) \times \mathbb{Z}/(6)$

(2) vs (3, 4) :

$\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(18)$ enthält ein Element von Ordnung 18, $\mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(12)$ und $\mathbb{Z}/(6) \times \mathbb{Z}/(6)$ aber nicht.

Also: $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(18) \not\simeq \mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(12)$,

$\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(18) \not\simeq \mathbb{Z}/(6) \times \mathbb{Z}/(6)$

(3) vs (4) :

$\mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(12)$ enthält ein Element von Ordnung 12, $\mathbb{Z}/(6) \times \mathbb{Z}/(6)$ aber nicht.

Also: $\mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(12) \not\simeq \mathbb{Z}/(6) \times \mathbb{Z}/(6)$.

Bsp $\mathbb{Z}/(4) \times \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$

$\overset{!}{\not\cong} \mathbb{Z}/(4) \times \mathbb{Z}/(4)$:

Beide Gruppen enthalten ein Element der Ordnung 4, das hilft also nicht.

Betrachten wir alle Elemente der Ordnung 4:

$\mathbb{Z}/(4) \times \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$ hat davon:

$(1, 0, 0)$ $(3, 0, 0)$

$(1, 0, 1)$ $(3, 0, 1)$

$(1, 1, 0)$ $(3, 1, 0)$

$(1, 1, 1)$ $(3, 1, 1)$

Das sind 8 Stück.

$\mathbb{Z}/(4) \times \mathbb{Z}/(4)$ hat davon:

$$
\begin{array}{cccc}
 & (1,0) & & (3,0) \\
(0,1) & (1,1) & (2,1) & (3,1) \\
 & (1,2) & & (3,2) \\
(0,3) & (1,3) & (2,3) & (3,3)
\end{array}
$$

Das sind 12 Stück.

Und $8 \neq 12$

Also:

$$\mathbb{Z}/(4) \times \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2) \not\cong \mathbb{Z}/(4) \times \mathbb{Z}/(4)$$