Bsp Sei $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, d \in \mathbb{F}_5^\times,\ b \in \mathbb{F}_5 \right\}$

$\leq GL_2(\mathbb{F}_5)$; cf. 07.06.21-4

(1) Es ist

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{F}_5 \right\}$$

$\in \mathrm{Syl}_5(G)$.

Es ist $P \trianglelefteq G$; Es ist

$$\begin{pmatrix} \tilde a & \tilde b \\ 0 & \tilde d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde a & \tilde b \\ 0 & \tilde d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \tilde a^{-1} & -\tilde a^{-1}\tilde b \tilde d^{-1} \\ 0 & \tilde d^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde a & \tilde b + b\tilde d \\ 0 & \tilde d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cancel{\tilde a^{-1}\tilde b + \tilde a^{-1} b \tilde d - \tilde a^{-1}\tilde b \tilde d \tilde d^{-1}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \tilde a^{-1} b \tilde d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in P$$

bei $\tilde a, \tilde d \in \mathbb{F}_5^\times$, $\tilde b, b \in \mathbb{F}_5$.

Also ist $\mathrm{Syl}_5(G) = \{P\}$; vgl. Kor 155.

(2) Es ist

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, d \in \mathbb{F}_5^\times \right\}$$

$$\in \mathrm{Syl}_2(G).$$

Es ist $|\mathrm{Syl}_2(G)|$ ein Teiler von $\frac{|G|}{|Q|} = 5$.

Es ist $|\mathrm{Syl}_2(G)| \neq 1$, da $Q \ntrianglelefteq G$, da z. B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin Q.$$

Also ist $|\mathrm{Syl}_2(G)| = 5$.

Die Bahn von $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = P$

auf $\mathrm{Syl}_2(G)$ hat Länge > 1,

wie eben festgestellt. Also

muß diese Bahn Länge 5

haben. Es folgt:

$$\mathrm{Syl}_2(G) = \left\{ {}^{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} Q \;:\; b \in \mathbb{F}_5 \right\}$$

<u>Bsp</u> $G = S_4$, $p = 2$

Sei $P := \langle \underbrace{(1,2,3,4)}_{a}, \underbrace{(1,3)}_{b} \rangle$

Es ist ${}^{b}a = (3,2,1,4) = a^{-1}$.

Also ist $b \circ a = a^{-1} \circ b$.

Also ist

$$P = \langle a, b \rangle = \{ a^j \circ b^k : 0 \leq j \leq 3, \; 0 \leq k \leq 1 \}$$

Diese 8 angeführten Elemente sind auch paarweise verschieden:

$a^0 = \mathrm{id}$ $\qquad$ $a^0 \circ b = (1,3)$

$a^1 = (1,2,3,4)$ $\qquad$ $a^1 \circ b = (1,4)(2,3)$

$a^2 = (1,3)(2,4)$ $\qquad$ $a^2 \circ b = (2,4)$

$a^3 = (1,4,3,2)$ $\qquad$ $a^3 \circ b = (1,2)(3,4)$

Somit ist $|P| = 8$

$$= 2^3 = 2^{v_2(|S_4|)}$$

Also ist $P \in \mathrm{Syl}_2(S_4)$

Ferner ist $P \ntrianglelefteq S_4$:

$${}^{(1,2,3)}(1,2,3,4) = (2,3,1,4) \notin P$$

Also ist $|\mathrm{Syl}_2(S_4)| \neq 1$; vgl. Kor. 155.

Es ist $|\mathrm{Syl}_2(S_4)|$ ein Teiler von $\frac{|G|}{|P|} = 3$.

Folglich ist $|\mathrm{Syl}_2(S_4)| = 3$.

Die Bahn von $\langle(1,2,3)\rangle$ auf $\mathrm{Syl}_2(S_4)$ hat nicht Länge 1, wie eben gesehen. Also hat sie Länge 3.

Somit: $\mathrm{Syl}_2(S_4) = \{P, {}^{(1,2,3)}P, {}^{(1,3,2)}P\}$